

Оглавление

Билет 1	2
Билет 2	7
Билет 3	12
Билет 4	15
Билет 5	17
Билет 6	20
Билет 7	23
Билет 8	27
Билет 9	29
Билет 10	32
Билет 11	35
Билет 12	38
Билет 13	40
Билет 14	44
Билет 15	56
Билет 16	59
Билет 17	61
Билет 18	62
Билет 19	64
Билет 20	67
Билет 21	70
Билет 22	76
Билет 23	78
Билет 24	82
Билет 25	84
Билет 26	85
Билет 27	89
Билет 28	90
Билет 29	94
Билет 30	96
Билет 31	98
Билет 32	102
Билет 33	105
Билет 34	107
Билет 35	113

Билет 1

Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.

Рациональным называется число, представимое (хотя бы одним способом) в виде отношения двух целых чисел, т. е. в виде дроби m/n , где m и n – целые числа и $n \neq 0$.

Рациональные числа обладают 16 основными свойствами:

1. Любые два числа a и b связаны одним и только одним из трёх знаков $>$, $<$ или $=$, причём если $a > b$, то $b < a$. Иными словами, существует правило упорядочения.
2. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c , называемое их суммой и обозначаемое символом $c = a + b$. Операция нахождения суммы называется сложением. $(a = \frac{m_1}{n_1}, b = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow a + b = c = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2})$
3. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c , называемое их произведением и обозначаемое символом $c = a \cdot b$. Операция нахождения произведения называется умножением. $(a = \frac{m_1}{n_1}, b = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow a \cdot b = c = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2})$
4. Если $a > b$ и $b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивность $>$). Если $a = b$ и $b = c \Rightarrow a = c$ (транзитивность $=$).
5. $a + b = b + a$ (коммутативность, или перестановочное свойство)
6. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность, или сочетательное свойство)
7. $\exists \theta: \forall a \ a + \theta = \theta + a = a$ (особый элемент по сложению – ноль)
8. $\forall a \ \exists ! a': a + a' = a' + a = \theta$ (противоположный элемент по сложению)
9. $a \cdot b = b \cdot a$
10. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
11. $\exists e: \forall a \ a \cdot e = e \cdot a = a$ (особый элемент по умножению - единица)
12. $\forall a \neq 0 \ \exists a': a \cdot a' = a' \cdot a = e$
13. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность, или распределительное свойство умножения относительно суммы)
14. $\forall c \text{ из } a > b \Rightarrow a + c > b + c$
15. $\forall c > 0 \text{ из } a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
16. Аксиома Архимеда: $\forall a \ \exists n: n \cdot e > a$. (каково бы ни было число a , можно число 1 повторить слагаемым столь раз, что сумма превзойдёт a)

Пусть числовая ось – прямая, на которой выбраны т. О (начало отсчёта), масштабный отрезок $OE = 1$ и положительное направление OE . Тогда $\forall a = \frac{m}{n} \in Q \exists$ т. M_1 , соответствующая a . Необходимо разделить отрезок OE в отношении $\frac{1}{n}$, а затем отложить влево или вправо от O (в зависимости от знака a) m таких отрезков.

Однако $\exists M_n: \nexists a \in Q$, соответствующее M_n . Например, если взять квадрат со стороной OE , а длину OM_n положить равной диагонали квадрата, то соответствующее M_n число x будет корнем уравнения $x^2 = 2$. Возникает потребность в расширении множества Q так, чтобы $\forall M \exists a \in R$, соответствующее M .

Докажем, что любой точке числовой прямой можно поставить в соответствие нек. число a . Для определённости примем, что M лежит правее O . Введём следующий алгоритм:

1. Проверим, сколько раз OE уложится в OM :

1.1. Если OE уложится в OM целое число a_0 без остатка, то ставим в соответствие M бесконечную периодическую дробь $a_0, (0)$, которой соответствует рациональное число a_0 .

1.2. Если OE уложится в OM целое число a_0 с остатком, то отметим точку N_0 , которой поставим в соответствие число a_0 , и проверим, сколько раз $\frac{OE}{10}$ уложится в N_0M .

1.2.1. Если $\frac{OE}{10}$ уложится в N_0M целое число a_1 без остатка, то ставим в соответствие M бесконечную бесконечную периодическую дробь $a_0, a_1(0)$, которой соответствует рациональное число a_0, a_1 .

1.2.2. Если $\frac{OE}{10}$ уложится в N_0M целое число a_1 с остатком, то отметим точку N_1 , которой поставим в соответствие число a_0, a_1 и проверим, сколько раз $\frac{OE}{100}$ уложится в N_1M .

и т. д. Повторяя указанный процесс, мы можем встретить два исхода:

1) Процесс оборвётся на n -ом шаге. Ставим в соответствие точке бесконечную периодическую дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_n(0)$, отождествляемую с рациональным числом $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$.

2) Процесс не оборвётся и мы получим бесконечную последовательность рациональных чисел

$a_0; a_0, a_1; \dots; a_0, a_1 a_2 \dots a_n; \dots,$

являющиеся результатов измерения по недостатку отрезка OM с точностью до

$$1, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$$

Каждое из этих чисел может быть получено обрыванием алгоритма на n -ом шаге. Это означает, что точке M соответствует определённая бесконечная десятичная дробь.

Данные рассуждения справедливы и для M , лежащей слева от O , но необходимо учитывать, что все дроби тогда имеют отрицательный знак.

Таким образом, мы можем ввести множество вещественных чисел. Пусть a – вещественное число, тогда по определению $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, или же:

Вещественные числа – это такие числа, которые представимы бесконечными десятичными дробями и для которых определены операции упорядочения, сложения и умножения.

Также существует способ введения вещественных чисел с помощью дедекиндовых сечений: вся числовая прямая разделяется на два подмножества так, что $Q_1 < a, Q_2 > a \Rightarrow \inf(Q_2) = \sup(Q_1) = a$.

Отметим, что записи $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n(0)$ и $a = a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1)(9)$ соответствуют одному и тому же числу a : между ними на числовой прямой нет другой точки. Так, например:

$$\frac{1}{3} * 3 = 1;$$

$$0, (3) * 3 = 1;$$

$$0, (9) = 1.$$

Введём правило упорядочения для бесконечных десятичных дробей, взятых как со знаком $+$, так и со знаком $-$, предварительно приведя их к одной форме записи:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

$$b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots,$$

$$a > 0 \leftrightarrow a = +a_0, \dots$$

$$a = b \leftrightarrow \text{совпали знаки } a \text{ и } b, \text{ причём } a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$$

Из этого определения вытекает, что $a = b, b = c \Rightarrow a = c$.

$$a \neq b:$$

$$1. a > 0, b > 0$$

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n \neq b_n$$

$$a_n > b_n \Rightarrow a > b,$$

$$a_n < b_n \Rightarrow a < b.$$

$$2. a < 0, b < 0.$$

$$\text{Введём модуль } a \text{ как } |a| = +a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

Тогда $|a|, |b| > 0$,

Тогда по п. 1 сравним модули:

$$|a| > |b| \Rightarrow a < b,$$

$$|a| < |b| \Rightarrow a > b.$$

$$3. a \geq 0, b < 0 \Rightarrow a > b.$$

Докажем транзитивность данного свойства, т. е. что $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

$$1. c \geq 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow a > 0.$$

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n > b_n,$$

$$b_0 = c_0, b_1 = c_1, \dots, b_{m-1} = c_{m-1}, b_m > c_m.$$

По условию для некоторого n и m однозначно должны соблюдаться подобные неравенства. Введём $k = \min\{m, n\}$. Тогда должно выполняться неравенство:

$$a_k \geq b_k \geq c_k, \text{ где хотя бы один из знаков строгий } \Rightarrow a_k > c_k \Rightarrow a > c.$$

$$2. c < 0, a < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow |a| < |b|, |b| < |c| \Rightarrow \text{по п. 1 } |a| < |c| \Rightarrow a > c.$$

$$3. c < 0, a \geq 0 \Rightarrow a > c$$

Транзитивность знака $>$ доказана.

Введём несколько определений.

Множество $\{X\} \subset R$ ограничено сверху $\Leftrightarrow \exists M \in R: \forall x \in \{X\} x \leq M$.

Число M называют верхней гранью множества $\{X\}$.

Множество $\{X\} \subset R$ ограничено снизу $\Leftrightarrow \exists m \in R: \forall x \in \{X\} x \geq m$.

Число m называют нижней гранью множества $\{X\}$.

M называют точной верхней гранью множества $\{X\}$, или $\sup\{x\} \Leftrightarrow$:

$$1) \forall x \in \{X\} x \leq M.$$

$$2) \forall M^* < M \exists x \in \{X\}: x > M^*, \text{ или}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: x > M - \varepsilon.$$

m называют точной нижней гранью множества $\{X\}$, или $\inf\{x\} \Leftrightarrow$:

$$1) \forall x \in \{X\} x \geq m.$$

$$2) \forall m^* > m \exists x \in \{X\}: x < m^*, \text{ или}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: x < m + \varepsilon.$$

Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.

Пусть $\{X\} \subset R$ — ограничено сверху (или снизу) $\Rightarrow \exists M = \sup\{x\}$
($\exists m = \inf\{x\}$)

Доказательство:

Для определённости пусть $\{x\}$ – ограничено сверху.

1⁰. Предположим, $\exists x \in \{X\}: x \geq 0$. Будем рассматривать лишь неотрицательные числа.

Рассмотрим все целые части этих десятичных дробей и выберем из них наибольшую $\overline{x_0}$. Оставим те неотрицательные числа, у которых целая часть равна $\overline{x_0}$, и рассмотрим их первые десятичные знаки после запятой.

Наибольший обозначим как $\overline{x_1}$. Оставим те числа, у которых первый знак после запятой равен $\overline{x_1}$, и рассмотрим их вторые десятичные знаки после запятой. Наибольший обозначим как $\overline{x_2}$. Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим число $\bar{x} = \overline{x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$

Докажем, что $\bar{x} = \sup\{x\}$.

Пусть $\exists x \in \{X\}: x > \bar{x}$. В таком случае, по правилу упорядочения, $\exists k: x_0 = \overline{x_0}, x_1 = \overline{x_1}, \dots, x_{k-1} = \overline{x_{k-1}}, x_k > \overline{x_k}$. Но мы брали $\overline{x_k}$ наибольшее, следовательно, получено противоречие. Оно возникло из предположения, что $\exists x \in \{X\}: x > \bar{x} \Rightarrow \forall x \in \{X\} x \leq \bar{x}$. (1)

Возьмём $x' < \bar{x}$. Пусть $x' > 0 \Rightarrow x' = \overline{x_0, x_1 x_2 \dots x_{l-1} \tilde{x}_l \dots}$, где $\tilde{x}_l < \overline{x_l}$. Но по правилу выборки $\exists x \in \{X\}: x = \overline{x_0, x_1 x_2 \dots x_{l-1} \overline{x_l}} \Rightarrow x > x'$.

Если же $x' < 0 \Rightarrow \exists x \in \{X\}: x > 0$ (по предположению) $\Rightarrow x > x'$. Это означает, что $\forall x' < \bar{x} \exists x \in \{X\}: x > x'$. (2).

Из 1) и 2) $\Rightarrow \bar{x} = \sup\{x\}$, ч. т. д. Для случая 1⁰ теорема доказана.

2⁰. $\nexists x \in \{X\}: x \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \{X\} x < 0$. Тогда проводим аналогичную процедуру, описанную в п. 1⁰, но делаем выборку наименьших членов: $\overline{x_0}$ – наименьшая из целых частей, $\overline{x_1}$ – наименьший десятичный знак и т. д. Так мы определим число $\bar{x} = \overline{x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$. Аналогично со случаем 1⁰ доказывается, что $\bar{x} = \sup\{x\}$.

Абсолютно аналогичным образом теорема доказывается для ограниченного снизу множества. **Теорема доказана.**

$\{X\}$ ограничено $\leftrightarrow \{X\}$ ограничено сверху и снизу

$\{X\}$ не ограничено сверху $\leftrightarrow \{X\}$ не является ограниченным сверху.

Билет 2

Приближение вещественных чисел рациональными. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

Возьмём число $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ (для определённости будем считать, что $a > 0$). Оборвём указанную дробь на n -ом знаке. Мы получаем рациональное число $a_1 = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq a$ (по правилу упорядочения). В то же время по тому же правилу упорядочения должно выполняться неравенство

$$a \leq a_0, a_1 a_2 \dots (a_n + 1) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n} = a_2$$

Отметим, что $a_2 - a_1 = 10^{-n} \leq \varepsilon$ (ε – наперёд заданное число, поэтому выберем его так, что $10^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$).

Отметим, что по аксиоме Архимеда лишь для конечного числа натуральных чисел справедливо неравенство $10^{-n} \geq \varepsilon$, а для всех остальных справедливо неравенство противоположное $10^{-n} < \varepsilon$, т. е. искомые числа найдутся.

Итак, мы **доказали** утверждение 1:

$$\text{для } \forall a \in R \exists a_1, a_2 \in Q: a_1 \leq a \leq a_2, a_2 - a_1 = 10^{-n} \leq \varepsilon$$

Докажем утверждение 2:

$$\forall a, b \in R: a < b \Rightarrow \exists \gamma \in Q: a < \gamma < b.$$

Доказательство:

$$1. a \geq 0 \Rightarrow b > 0$$

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots$$

$$b = b_0, b_1 b_2 \dots$$

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n.$$

Договоримся о следующем: если число представимо в виде рационального числа, то мы будем брать форму записи с бесконечными нулями. Тогда для a при $k > n$ невозможно, чтобы

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{k-1} = a_k = 9$$

в силу принятой договорённости. Тогда максимальное значение, которое может достигать a , будет

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n 99 \dots a_k \dots, a_k \neq 9$$

Тогда для $\gamma = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n 99 \dots (a_k + 1)$ справедливо указанное неравенство: $a < \gamma < b$.

$$2. b \leq 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow |a| > |b| \Rightarrow \text{по п. 1 } \exists \beta \in Q \Rightarrow |b| < \beta < |a| \Rightarrow \text{достаточно взять } \gamma = -\beta, \text{ и неравенство будет выполняться.}$$

$$3. a < 0, b > 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Утверждение доказано.

Следствие: $\forall a, b \in R: a < b \Rightarrow \exists$ бесконечно много $\gamma \in Q: a < \gamma < b$

По доказанному утверждению $\exists \gamma_1 \in Q: a < \gamma_1 < b$. Но, т. к. $\gamma_1 \in Q \subset R$, $\exists \gamma_2 \in Q: a < \gamma_2 < \gamma_1$ и т. д.

Докажем утверждение 3:

$$\forall \varepsilon \in Q, \varepsilon > 0, a, b \in R \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in Q: \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2, \alpha_1 \leq b \leq \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1 \leq \varepsilon \Rightarrow a = b.$$

Доказательство:

Предположим, что $a \neq b$ и, не ограничивая общности, $a < b$. Тогда по доказанному следствию $a < \gamma_2 < \gamma_1 < b$. Получим цепочку следующих неравенств: $\alpha_1 \leq a < \gamma_2 < \gamma_1 < b \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \geq \varepsilon' = \gamma_1 - \gamma_2 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ оно возникло из предположения, что $a \neq b \Rightarrow a = b$.

Утверждение доказано.

Введём операцию сложения вещественных чисел.

Суммой a и b ($a, b \in R$) называют $c \in R$:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q: \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2, \beta_1 \leq b \leq \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2.$$

Докажем, что $\exists! c = a + b$.

Доказательство:

Для начала покажем, что $\exists c$.

Фиксируем α_2, β_2 . Рассмотрим всевозможные α_1, β_1 такие, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$. Множество всех сумм $\{\alpha_1 + \beta_1\}$ ограничено сверху $\Rightarrow$ по т. о существовании точной верхней грани $\exists \sup\{\alpha_1 + \beta_1\} = c$. Тогда очевидно неравенство $c \geq \alpha_1 + \beta_1, \forall \alpha_1, \beta_1$ (по определению).

Кроме того, из неравенств $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$ вытекает, что $\alpha_2 + \beta_2 \geq \alpha_1 + \beta_1$, т.е. $\alpha_2 + \beta_2$ — одна из верхних граней $\{\alpha_1 + \beta_1\} \Rightarrow c \leq \alpha_2 + \beta_2$. Следовательно, $\exists c: \alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2$.

Докажем единственность. Пусть $\exists c_1, c_2: \alpha_1 + \beta_1 \leq c_1, c_2 \leq \alpha_2 + \beta_2$.

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in Q:$$

$$\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2, \beta_1 \leq b \leq \beta_2$$

$$\text{По утв. 1 } \alpha_2 - \alpha_1 \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}; \beta_2 - \beta_1 \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Получаем, что } (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) \leq \varepsilon.$$

Пускай $(\alpha_2 + \beta_2) = \gamma_2, (\alpha_1 + \beta_1) = \gamma_1$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma_1, \gamma_2:$$

$$\gamma_1 \leq c_1 < \gamma_2$$

$$\gamma_1 \leq c_2 < \gamma_2$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 \leq \varepsilon.$$

Но по утв. 3 $c_1 = c_2 \Rightarrow \exists! c = a + b$.

Теорема доказана.

Введём операцию умножения вещественных чисел.

c называется произведением двух вещественных чисел a и b ($a, b > 0$), если:

$$\forall \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in Q$$

$$0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2,$$

$$0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2$$

$$\alpha_1 \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 \beta_2$$

Полагают, что если $a = 0$ или $b = 0$, то $a \cdot b = 0$.

Произведение определяется по следующему правилу:

$$c = \begin{cases} |a| \cdot |b|, & \text{если } a \text{ и } b \text{ одного знака} \\ -|a| \cdot |b|, & \text{если } a \text{ и } b \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Докажем, что $\exists! c = a \cdot b$.

Доказательство:

Для начала покажем, что $\exists c$.

Фиксируем α_2, β_2 . Рассмотрим всевозможные α_1, β_1 такие, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$. Множество всех произведений $\{\alpha_1 \cdot \beta_1\}$ ограничено сверху $\Rightarrow$ по т.о существовании точной верхней грани $\exists \sup\{\alpha_1 \cdot \beta_1\} = c$.

Тогда очевидно неравенство $c \geq \alpha_1 \cdot \beta_1, \forall \alpha_1, \beta_1$ (по определению).

Кроме того, из неравенств $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$ вытекает, что $\alpha_2 \cdot \beta_2 \geq \alpha_1 \cdot \beta_1$, т.е. $\alpha_2 \cdot \beta_2$ — одна из верхних граней $\{\alpha_1 \cdot \beta_1\} \Rightarrow c \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$. Следовательно, $\exists c: \alpha_1 \cdot \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$.

Докажем единственность. Пусть $\exists c_1, c_2: \alpha_1 \cdot \beta_1 \leq c_1, c_2 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$.

$\forall \varepsilon' > 0, \exists \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in Q$:

$$0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \leq M, 0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2 \leq M$$

$$\text{По утв. 1 } \alpha_2 - \alpha_1 \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}; \beta_2 - \beta_1 \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\text{Получаем, что } (\alpha_2 \cdot \beta_2) - (\alpha_1 \cdot \beta_1) = (\alpha_2 \cdot \beta_2) - \alpha_2 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_1 - (\alpha_1 \cdot \beta_1) = \alpha_2 \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Пускай $(\alpha_2 \cdot \beta_2) = \gamma_2, (\alpha_1 \cdot \beta_1) = \gamma_1$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma_1, \gamma_2:$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\leq c_1 \leq \gamma_2 \\ \gamma_1 &\leq c_2 \leq \gamma_2 \\ \gamma_2 - \gamma_1 &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Но по утв. 3 $c_1 = c_2 \Rightarrow \exists! c = a \cdot b$.

Теорема доказана.

Теперь мы корректно ввели множество вещественных чисел. Докажем, что для них соблюдаются все те же 16 свойств, что и для рациональных.

1. Любые два числа a и b связаны одним и только одним из трёх знаков $>$, $<$ или $=$, причём если $a > b$, то $b < a$. Иными словами, существует правило упорядочения. (см. билет 1)
2. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c , называемое их суммой и обозначаемое символом $c = a+b$. Операция нахождения суммы называется сложением.
3. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c , называемое их произведением и обозначаемое символом $c = a \cdot b$. Операция нахождения произведения называется умножением.
4. Если $a > b$ и $b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивность $>$). Если $a = b$ и $b = c \Rightarrow a = c$ (транзитивность $=$). (см. билет 1)
5. $a + b = b + a$ (коммутативность, или перестановочное свойство).

Доказательство:

$$\begin{aligned}\alpha_1(+) \beta_1 &\leq a + b \leq \alpha_2(+) \beta_2 \\ \beta_1(+) \alpha_1 &\leq b + a \leq \beta_2(+) \alpha_2\end{aligned}$$

По утв. 3 и из коммутативности сложения рациональных чисел $a + b = b + a$.

Свойство доказано.

6. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность, или сочетательное свойство) **(вытекает из определения)**
7. $\exists \theta: \forall a \ a + \theta = \theta + a = a$ (особый элемент по сложению – ноль) ($\theta = 0, (0)$). $\forall a \ a + \theta = a$
8. $\forall a \ \exists! a': a + a' = a' + a = \theta$ (противоположный элемент по сложению)

Доказательство:

$$\begin{aligned}a + a' &= 0; \quad a + a'' = 0; \\ a + a' + a'' &= (a + a') + a'' = a'' \\ (a + a'') + a' &= a' \Rightarrow a' = a''.\end{aligned}$$

Введём операцию вычитания. Разностью a и b назовём c : $c + b = a$

$$c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a.$$

9. $a \cdot b = b \cdot a$ (по аналогии со свойством 5)

10. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (вытекает из определения)

11. $\exists e: \forall a \ a \cdot e = e \cdot a = a$ (особый элемент по умножению - единица)
($e = 1, (0)$)

12. $\forall a \neq 0 \ \exists a': a \cdot a' = a' \cdot a = e$ ($a' = \sup\{\frac{1}{\alpha_2}\}$)

Введём операцию деления. Частным a и b назовём c : $c \cdot b = a$.

13. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность, или распределительное свойство умножения относительно суммы)

14. $\forall c$ из $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Доказательство:

$$b < \beta_2 < \alpha_1 < a, \quad \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2;$$

$$\gamma_1 \leq c \leq \gamma_2, \quad \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 \leq a + c \leq \alpha_2 + \gamma_2$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \leq b + c \leq \beta_2 + \gamma_2$$

$$(\alpha_1 + \gamma_1) - (\beta_2 + \gamma_2) = (\alpha_1 - \beta_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = \varepsilon - (\gamma_2 - \gamma_1) > 0$$

$$a + c \geq (\alpha_1 + \gamma_1) > (\beta_2 + \gamma_2) \geq b + c \Rightarrow a + c > b + c, \text{ ч. т. д.}$$

Свойство доказано.

15. $\forall c > 0$ из $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

16. Аксиома Архимеда: $\forall a \ \exists n: n \cdot e > a$. (каково бы ни было число a , можно число 1 повторить слагаемым столь раз, что сумма превзойдёт a)

Доказательство:

$$1. \ a < 0 \Rightarrow 1 > a$$

$$2. \ a \geq 0; \ a = a_0, a_1 a_2 \dots$$

$$n = a_0 + 2 \Rightarrow n > a.$$

Свойство доказано.

Билет 3

Счетные множества и множества мощности континуум. Неэквивалентность множества мощности континуум счетному множеству.

Множество – совокупность объектов любой природы, обладающих определённым свойством.

Суммой множеств A и B называется третье множество C , состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B : $C = A \cup B$.

Аналогично определяется сумм любого числа множеств: $C = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество C , состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A , так и множеству B , т. е. из элементов, общих для множеств A и B : $C = A \cap B$.

Рассмотрим два множества. Если в одном из них элементов больше, чем в другом рассматриваемом множестве, то говорят, что оно имеет большую мощность, чем другое множество.

Два множества A и B называются эквивалентными ($A \sim B$), если между ними существует взаимно однозначное (биективное) соответствие.

1. $\forall a \in A \exists! b \in B$;
2. $\forall b \in B \exists! a \in A$;
3. Разным элементам множества A отвечают разные элементы множества B .

Докажем эквивалентность множеств натуральных и рациональных чисел.

Доказательство:

Под высотой h рационального числа $\frac{m}{n}$ будем понимать $h = |m| + n$.

Отметим, что $\forall k \neq 0 \frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$. Будем считать, что $\frac{m}{n}$ – дробь несократимая, т.е. представляется единственным способом. Примем также, что число 0 представимо единственным способом: $0 = \frac{0}{1}$.

Занумеруем все числа, последовательно увеличивая высоту.

$$\begin{aligned} h = 1: & \frac{0}{1} \leftrightarrow 1 \\ h = 2: & \frac{1}{1} \leftrightarrow 2; -\frac{1}{1} \leftrightarrow 3 \\ h = 3: & \frac{1}{2} \leftrightarrow 4; -\frac{1}{2} \leftrightarrow 5; \frac{2}{1} \leftrightarrow 6; -\frac{2}{1} \leftrightarrow 7; \\ h = 4: & \dots \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом, мы показали взаимно однозначное соответствие между множествами рациональных и натуральных чисел $\Rightarrow Q \sim N$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Под счётным множеством будем понимать множество, эквивалентное множеству натуральных чисел. ($A \sim N \Rightarrow A$ – счётное)

Утверждение 1. Всякое непустое подмножество счётного множества является или множеством, состоящим из конечного числа элементов, или множеством счётным.

Доказательство:

Пусть A – исходное счётное множество. Расположим занумерованные элементы A в виде последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Пусть B – непустое подмножество A . Рассмотрим последовательно все элементы A . Если $a_1 \in B$, то обозначим его b_1 ; иначе переходим к рассмотрению a_2 . При рассмотрении a_2 возможно два исхода:

1. $a_2 \in B \Rightarrow$ если $a_1 \in B$, то обозначим a_2 как b_2 , а иначе – как b_1 .
2. $a_2 \notin B \Rightarrow$ переходим к рассмотрению a_3 .

и т. д. Ясно, что при этом может случиться, что все элементы множества B будут расположены в виде конечной последовательности $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. ($M < \infty$). В ином случае мы выпишем элементы множества B в виде занумерованной последовательности, т. е. B будет счётным, ч. т. д.

Утверждение доказано.

Теорема Кантора-Бернштейна. (Теорема 1)

$$A' \subset A, A' \sim B, B' \subset B, B' \sim A \Rightarrow A \sim B.$$

Доказательство:

1. Пускай $A' \not\sim A$. В таком случае $A' \sim B \Rightarrow B \not\sim A \Rightarrow B'$ либо такой же, либо меньшей мощности, что и B по утв. 1 $\Rightarrow B' \not\sim A \Rightarrow$ противоречие, возникшее из предположения, что $A' \not\sim A$. Значит, $A' \sim A$.
2. $A' \sim A, A' \sim B \Rightarrow A \sim B$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Утверждение 2.

Сумма любой конечной или счётной совокупности счётных множеств есть множество счётное. ($A_i \sim N, i = 1, \dots, n \Rightarrow A = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \sim N$).

Доказательство:

Пусть $A_1, A_2, A_3, \dots$ – совокупность счётных множеств. Расположим их

элементы в виде последовательности.

$$\begin{array}{lll} A_1 = a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \dots \\ A_2 = a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \dots \\ A_3 = a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \text{ и т. д.}$$

Пронумеруем элементы по диагоналям: $a_1 = a_{11}, a_2 = a_{21}, a_3 = a_{12}, a_4 = a_{31}$

Следовательно, множество A – счётное, ч. т. д.

Утверждение доказано.

Теорема 2.

Множество всех точек сегмента $(0, 1)$ несчётно. $((0, 1) \sim N)$.

Доказательство:

Пусть $(0, 1) \sim N$, т. е. его элементы удалось занумеровать.

$$(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

$$x_i = 0, x_{i1}x_{i2}x_{i3} \dots x_{ik} \dots$$

Возьмём некоторое число $x' = 0, x'_1x'_2x'_3 \dots x'_n \dots$

Очевидно, $x' \in (0, 1)$. Пусть $\forall x'_i \neq 0, 9$, при этом

$$x'_i = \begin{cases} 7, & \text{если } x_i \neq 7 \\ 5, & \text{если } x_i = 7. \end{cases}$$

Но в таком случае $\nexists i: x_i = x'_i \Rightarrow \nexists x \in (0, 1): x' = x \Rightarrow$ противоречие, возникшее из-за предположения, что $(0, 1)$ – счётное множество $\Rightarrow (0, 1) \not\sim N \Rightarrow [0, 1]$ также несчётен, т. к. $[0, 1] = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$.

Теорема доказана.

Множество мощности континуума – множество, эквивалентное множеству точек сегмента $[0, 1]$.

Из этого определения следует, что множества мощности континуума неэквивалентны счётным множествам, так как $(0, 1) \not\sim N$. Кроме того, из теоремы 2 следует, что на интервале $(0, 1)$ существует бесчётное множество иррациональных чисел – если бы их было счётное количество, то тогда $(0, 1)$ был бы счётным.

Билет 4

Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Их основные свойства.

$\{x_n\}$ называется числовой последовательностью, если $\forall n \in N$ по некоторому закону ставится в соответствие элемент последовательности x_n . ($n \rightarrow x_n \in R$)

$\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу) $\Leftrightarrow$

$\exists M (\exists m): \forall x_n \in \{x_n\} \Rightarrow x_n \leq M (x_n \geq m)$, или

$\exists M (\exists m): \forall n \in N \Rightarrow x_n \leq M (x_n \geq m)$,

При этом $M (m)$ называют верхней (нижней) гранью последовательности $\{x_n\}$

Ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесконечное количество верхних (нижних) граней: действительно, если $\exists M (\exists m): \forall n \in N \Rightarrow x_n \leq M (x_n \geq m)$ достаточно взять $\forall M' > M (m' < m)$, которых найдётся бесконечно большое количество.

$\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т. е.

$\{x_n\}$ – ограниченная $\Leftrightarrow \exists M > 0: \forall n \Rightarrow |x_n| \leq M$,

$\{x_n\}$ – неограниченная $\Leftrightarrow \forall M > 0 \exists n(M): |x_n| > M$.

$\{x_n\}$ называется бесконечно большой (б. б. п.), если:

$\forall M > 0 \exists N(M): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| \geq M$.

$\{x_n\}$ называется бесконечно малой (б. м. п.), если:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей:

1. Сумма $\{\alpha_n + \beta_n\}$ двух б. м. п. $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б. м. п.

Доказательство:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right): \forall n \geq N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right): \forall n \geq N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда верно следующее:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = N_1 + N_2: \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon \Rightarrow \{\alpha_n + \beta_n\}$ – б. м. п. по определению.

Свойство доказано.

2. Разность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ двух б. м. п. $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б. м. п. (отличие от доказательства выше - $|\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$)
3. Произведение ограниченной на б. м. п. – б. м. п.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ – б. м. п.

$$\begin{aligned} \exists M > 0: \forall n \Rightarrow |x_n| \leq M, \\ \forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right): \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}. \end{aligned}$$

Тогда верно следующее:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n * x_n| = |\alpha_n| * |\beta_n| < \varepsilon \Rightarrow \\ \{\alpha_n * x_n\} - \text{б. м. п. по определению.} \end{aligned}$$

Свойство доказано.

4. Всякая б. м. п. – ограниченная (достаточно взять модуль наибольшего элемента)
5. Если $\exists N: \forall n \geq N x_n = c \Rightarrow c = 0$. (берём $\varepsilon = |c|$ и получаем $|c| < |c|$)
6. Если $\{x_n\}$ – б. б. п., $\forall n x_n \neq 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б. м. п., и наоборот:
Если $\{\alpha_n\}$ – б. м. п., $\forall n \alpha_n \neq 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – б. б. п

Доказательство:

а) $\forall M > 0 \exists N(M): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| \geq M$. Тогда:

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{M} > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

б) $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$.

$$\forall M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \exists N(M): \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| \geq M, \text{ ч. т. д.}$$

Далее идут, вероятно, необязательные свойства.

7. Ограниченная, делённая на б. б. п. – б. м. п.
8. Ограниченная снизу, делённая на б. м. п., – б. б. п.
9. Сумма/разность ограниченной и б. б. п. – б. б. п.

Билет 5

Понятие сходящейся последовательности. Основные теоремы о сходящихся последовательностях (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические операции над сходящимися последовательностями).

Последовательность $\{x_n\}$ называют сходящейся, если существует такое вещественное число a , что последовательность $\{x_n - a\}$ – б. м. п. При этом число a называют пределом последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ } (x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty), \text{ если:}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

$$(x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b \Rightarrow a = b)$$

Доказательство:

Пусть $x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b$. Тогда, по определению, $\{x_n - a\} = \alpha_n$ – б. м. п.

Аналогично $\{x_n - b\} = \beta_n$ – б. м. п.

Тогда $x_n = a + \alpha_n = b + \beta_n \Rightarrow (a - b) = \text{const} = \beta_n - \alpha_n = \gamma_n$ – б. м. п.

Тогда по св. 5 $a - b = 0 \Rightarrow a = b$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность с пределом a . Тогда

$\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon$. Возьмём некоторое $\varepsilon = \varepsilon'$, зафиксировав его и номер N' . Тогда: $\forall n \geq N' a - \varepsilon' < x_n < a + \varepsilon'$.

Обозначим $M = \max\{|a - \varepsilon'|, |a + \varepsilon'|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|\}$. В таком случае выполняется следующее условие: $\exists M > 0: \forall n \Rightarrow |x_n| \leq M$, а это условие ограниченности последовательности $\Rightarrow \{x_n\}$ – ограниченная, ч. т. д.

Теорема доказана.

Теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями:

$$1. \quad \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \Rightarrow \{x_n \pm y_n\} \rightarrow a \pm b.$$

Доказательство:

Раз $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся, то $x_n = a + \alpha_n; y_n = b + \beta_n$.

Из этих соотношений напрямую следует, что $(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n$.
 $\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n$ – б. м. п., т. е. $(x_n \pm y_n) = (a \pm b) + \gamma_n \Rightarrow (x_n \pm y_n) \rightarrow (a \pm b)$,
ч. т. д.

Свойство доказано.

$$2. \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \Rightarrow \{x_n * y_n\} \rightarrow a * b$$

Доказательство:

Раз $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся, то $x_n = a + \alpha_n; y_n = b + \beta_n$.

Из этих соотношений напрямую следует, что

$$(x_n * y_n) - (a * b) = b * \alpha_n + a * \beta_n + \alpha_n * \beta_n = \gamma_n \text{ – б. м. п. (из свойств б. м. п.)}$$

$$\text{т. е. } (x_n * y_n) = (a * b) + \gamma_n \Rightarrow (x_n * y_n) \rightarrow (a * b), \text{ ч. т. д.}$$

Свойство доказано.

$$3. \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Лемма.

Пусть $y_n \rightarrow b, b \neq 0 \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow y_n \neq 0$,

$\forall n \geq N \Rightarrow$ определена ограниченная $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N |y_n - b| < \varepsilon. \text{ Пусть } \varepsilon = \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

$$|b| = |(b - y_n) + y_n| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n| \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \neq 0.$$

Следовательно, $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow y_n \neq 0$, и тогда $\left| \frac{1}{y_n} \right| < \frac{2}{|b|} \Rightarrow$

$\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ – ограниченная, ч. т. д.

Лемма доказана.

Доказательство свойства:

$\{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \neq 0$. Рассмотрим их с некоторого номера $N: \forall n \geq N \Rightarrow y_n \neq 0$.

Достаточно доказать, что $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$ – б. м. п.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n * b - y_n * a}{y_n * b} = \frac{(a + \alpha_n) * b - (b + \beta_n) * a}{y_n * b} = \frac{(\alpha_n) * b - (\beta_n) * a}{y_n * b}$$

В таком случае

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} * \left(\alpha_n - \frac{a}{b} * \beta_n \right) = \gamma_n - \text{б. м. п.} \Rightarrow \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \rightarrow \frac{a}{b}, \text{ ч. т. д.}$$

Свойство доказано.

Билет 6

Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число ε .

Теорема о предельном переходе в неравенствах.

$$\exists N: \forall n \geq N \quad x_n \geq b \quad (x_n \leq b), x_n \rightarrow a \Rightarrow a \geq b \quad (a \leq b)$$

Доказательство:

Пусть $a < b$. Тогда $\varepsilon = b - a > 0 \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, но тогда $a - b < x_n - a < b - a \Rightarrow x_n < b \Rightarrow$ противоречие, возникшее из-за предположения, что $a < b \Rightarrow a \geq b$, ч. т. д.

Аналогично для $x_n \leq b$: пусть $a > b$, $b - a < x_n - a < a - b \Rightarrow x_n > b \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a \leq b$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N: \forall n \geq N \quad x_n < y_n \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} (x_n - y_n) &\rightarrow a - b; \\ x_n - y_n &\leq 0 \Rightarrow (a - b) \leq 0 \Rightarrow a \leq b, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Теорема о двух эволюентах:

$$\begin{aligned} &\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}. \\ &\exists N': \forall n \geq N': x_n \leq y_n \leq z_n; \\ &x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a \Rightarrow y_n \rightarrow a. \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2 \quad |z_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

Рассмотрим все элементы последовательностей, начиная с N' . Для них справедливо неравенство

$$\begin{aligned} x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a \Rightarrow |y_n - a| &\leq \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\} < \varepsilon, \text{ т. е.} \\ \forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon) = \max\{N', N_1, N_2\}: \forall n \geq N \quad |y_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow y_n \rightarrow a, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если каждый элемент этой последовательности, начиная со второго, не меньше (не больше) предыдущего её элемента, т. е. если $\forall n x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$)

Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной пос-ти.

$\{x_n\}$ – монотонна и ограничена $\Rightarrow \{x_n\}$ сходится.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ не убывает (для определённости) $\Rightarrow \exists a = \sup\{x_n\}$.

Покажем, что $x_n \rightarrow a$.

Т. к. $a = \sup\{x_n\}$, то по определению:

1. $\forall n x_n \leq a$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: x_N > a - \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$ по определению $x_n \rightarrow a$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Следствие 2.

$\{x_n\}$ не убывает (не возрастает) и не ограничена $\Rightarrow x_n \rightarrow +\infty (-\infty)$

Доказательство:

$\{x_n\}$ не убывает, не ограничена $\Rightarrow$ пусть она не ограничена сверху, т. е.

$\forall M > 0 \exists N: x_N \geq M$

$\forall n \geq N \Rightarrow x_n \geq x_N \geq M \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$, ч. т. д.

Следствие доказано.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Разложим n -ый член по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n * \frac{1}{n} + \frac{n * (n-1)}{2!} * \frac{1}{n^2} + \frac{n * (n-1) * (n-2)}{3!} * \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad + \frac{n * (n-1) \dots (n-(n-1))}{n!} * \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\quad * \left(1 - \frac{2}{n}\right) * \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots * \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} * \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} * \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) * \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \\
 * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots * \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)!} * \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \\
 * \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow x_{n+1} > x_n \text{ (т. к. } \left(1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}\right))
 \end{aligned}$$

Монотонность последовательности доказана (возрастающая).

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \text{ (сумма бесконечно убывающей прогрессии равна 1)}$$

Следовательно, x_n возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow \{x_n\}$ – сходится.

Пускай $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (по определению). Так мы вводим важнейшую математическую константу.

Билет 7

Понятие предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Пусть заданы $\{x_n\}$. $\{k_n\}$ возрастает, $k_n \in N$
 $n \rightarrow k_n \leftrightarrow x_{k_n}$ – подпоследовательность.

Утверждение 1. $x_n \rightarrow a \Rightarrow \forall x_{k_n} \rightarrow a$.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall k_n \geq n \geq N |x_{k_n} - a| < \varepsilon$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. $\forall x_{k_n} \rightarrow a \Rightarrow x_n \rightarrow a$.

Доказательство: $k_n = n \Rightarrow x_n \rightarrow a$, ч. т. д. **Утверждение доказано.**

Определение 1. Точка x бесконечной прямой $(-\infty; +\infty)$ называется **предельной точкой последовательности** $\{x_n\}$, если в любой окрестности точки x содержится бесконечно много элементов этой последовательности.

$(x' - \text{предельная точка } \{x_n\}) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ беск. много } x_n \in (x' - \varepsilon; x' + \varepsilon))$

Определение 2. Точка x бесконечной прямой $(-\infty; +\infty)$ называется **предельной точкой последовательности** $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к x .

$(x' - \text{предельная точка } \{x_n\}) \leftrightarrow \exists \{x_{k_n}\} \rightarrow x'$

Эквивалентность определений:

1) Опр. 2 $\rightarrow$ опр. 1:

$$x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |x_{k_n} - x'| < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

2) Опр. 1 $\rightarrow$ опр. 2.

Рассмотрим совокупность ε -окрестностей точки x' , где $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ (последовательно). В первой окрестности выберем элемент x_{k_1} , во второй – соответственно x_{k_2} ($k_2 > k_1$), в третьей – x_{k_3} ($k_3 > k_2 > \dots$) и т. д. Процесс можно повторять бесконечно, т. к. в любой ε -окрестности точки находится

бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. В результате такой операции мы получим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$, причём, так как $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n} = \varepsilon$, то $x_{k_n} \rightarrow x'$, ч. т. д.

Эквивалентность доказана.

Вспомогательная теорема о вложенных (стягивающихся) сегментах.

$[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ (вложенный сегмент)

$|b_n - a_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (стягивающийся сегмент)

Пусть $[a_n; b_n]$ – вложенные стягивающиеся сегменты $\Rightarrow \exists! c \in [a_n; b_n]$
 $\forall n [a; b]: \forall x: a \leq x \leq b$.

Доказательство:

1. Сначала докажем существование c . Возьмём два сегмента таких, что:

$$\forall m, n \Rightarrow a_m \leq b_n$$

Рассмотрим $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$: $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \Rightarrow \{a_n\}$ – неуб., $\{b_n\}$ – невозр.

$$m = n \Rightarrow a_n < b_n \text{ или } a_m < b_n$$

$$m < n \Rightarrow a_m \leq a_n < b_n \Rightarrow a_m < b_n$$

$$m > n \Rightarrow a_m < b_m \leq b_n \Rightarrow a_m < b_n$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничено сверху $\Rightarrow \exists a' = \sup\{a_n\}$, причём

$$\forall b_n - \text{верхняя грань } \{a_n\} \Rightarrow \forall n a_n \leq a' \leq b_n;$$

$$\{b_n\} \text{ ограничено снизу } \forall a_n \Rightarrow \exists \inf\{b_n\} = b' \Rightarrow a_n \leq b' \leq b_n.$$

$$a_n \rightarrow a', b_n \rightarrow b', a_n < b_n \forall n \Rightarrow a' \leq b'.$$

$$\text{Но } b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow b' - a' = 0 \Rightarrow a' = b' = c.$$

2. Докажем единственность c . Предположим, $\exists c'$ и c'' , $c' < c''$:

$$c', c'' \in [a_n; b_n] \Rightarrow b_n - a_n \geq c'' - c' = \varepsilon' > 0 \Rightarrow$$

противоречие ($b_n - a_n \rightarrow 0$) $\Rightarrow \exists! c = a' = b'$ – общая часть $[a_n; b_n]$.

Теорема доказана.

Наибольшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется верхним пределом этой последовательности и обозначается $\bar{x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Наименьшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется нижним пределом этой последовательности и обозначается $\underline{x} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности.

$$\{x_n\} - \text{ограничена} \Rightarrow \exists x' \text{ (пред. точка)}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

Доказательство:

$$a \leq x_n \leq b.$$

1. Образует систему вложенных стягивающихся сегментов.

$a_0 = a, b_0 = b \Rightarrow c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \Rightarrow$ хотя бы на одном из сегментов $[a_0; c_0]$ или $[c_0; b_0]$ находится бесконечно много элементов $\{x_n\} \Rightarrow$ выбираем этот сегмент $\Rightarrow$ обозначаем его как $[a_1; b_1]$.

В случае, когда бесконечно много элементов присутствует на обоих сегментах, следует выбирать тот, который необходим для доказательства существования предела: для верхнего $[c_0; b_0]$, а для нижнего $[a_0; c_0]$.

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \text{ из } [a_1; c_1] \text{ и } [c_1; b_1] \text{ выберем тот, где б. м. элементов.}$$

Обозначаем как $[a_2; b_2]$ и т. д.

Т. к. $[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$, то это система вложенных сегментов.

Т. к. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ система стягивающихся сегментов.

Значит, $\exists! c \in [a_n; b_n]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n: b_n - a_n < \varepsilon$$

$[a_n; b_n] \subset (c - \varepsilon; c + \varepsilon) \Rightarrow$ на сегменте б. м. элементов $\{x_n\} \Rightarrow c$ — предельная точка $\{x_n\}, x' = c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

2. Рассмотрим $x'' > x' (x'' < x')$. Покажем, что x'' не является предельной точкой $\{x_n\}$.

Выше мы доказали, что $\forall \varepsilon > 0$ вне сегмента $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ справа (слева) лежит конечное число элементов последовательности (по способу выбора c).

Пускай $\varepsilon = \frac{x'' - x'}{2} > 0$ ($\varepsilon = \frac{x' - x''}{2}$) $\Rightarrow$ ε -окрестности x'' и x' не

пересекаются, ε -окрестность x'' правее (левее) этой же окрестности $x' \Rightarrow$ в данной ε -окрестности x'' — конечное число элементов $\Rightarrow x''$ — не предельная

точка $\{x_n\} \Rightarrow x' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, (x' = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n)$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Теорема Больцано-Вейерштрасса:

$$\forall \{x_n\} - \text{ограниченная} \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} - \text{сходящаяся.}$$

Доказательство:

Т. к. для $\{x_n\} \exists x', \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, а в окрестности этих точек лежит б. м.

элементов последовательности, то можно выделить x_{n_k} , все элементы

которой лежат в окрестности $x' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, или $x' = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, следовательно,

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N: |x_n - x'| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x' \Rightarrow x_{n_k}$ сходится, ч. т. д.

Теорема доказана.

Билет 8

Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши).

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что для всех номеров $n \geq N$ и для любого натурального p справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Свойство 1. Для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что в окрестности этого элемента x_N находятся все элементы x_n этой последовательности с номерами $n \geq N$.

Доказательство:

Пусть $n = N$. Тогда $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon \Rightarrow x_N - \varepsilon > x_{N+p} < x_N + \varepsilon$. Так как p – любое натуральное, то $\forall x_n: n \geq N$ находится в ε окрестности x_N , ч. т. д.

Свойство доказано.

Свойство 2. Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство:

Т. к. $\{x_n\}$ – фундаментальна, то $\exists N: \forall n \geq N x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon$.

Пускай $A = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|)$. Тогда соблюдается неравенство: $\forall n x_n < A \Rightarrow x_n$ – ограниченная, ч. т. д.

Свойство доказано.

Докажем вспомогательную теорему.

Теорема.

$$\{x_n\} \text{ — сходится } \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ — ограничена, } \overline{x} = \underline{x}.$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ – сходится. Тогда $\{x_n\}$ – ограничена и имеет всего одну предельную точку $\Rightarrow \overline{x} = \underline{x}$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – ограничена, $\overline{x} = \underline{x}$, при этом $x = \overline{x} = \underline{x}$. Все элементы $\{x_n\}$ лежат в ε – окрестности x с $n = N \Rightarrow$ по определению сходящейся последовательности $\{x_n\} \rightarrow x$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Критерий Коши:

$\{x_n\}$ сходится $\leftrightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная.

Доказательство:

Необходимость. $x_n \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \quad & \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ & \forall m \geq N \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x_m| = \\ & = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon \Rightarrow \text{либо } n = m + p, \text{ либо} \\ & m = n + p \Rightarrow x_n - \text{фундаментальная.} \end{aligned}$$

Достаточность. $\{x_n\}$ – фундаментальная $\Rightarrow$ ограниченная $\Rightarrow$

$\exists x' = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, и $x'' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, при этом из фундаментальности

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$: вне $\left[x_N - \frac{\varepsilon}{2}; x_N + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ есть лишь конечное число элементов $\{x_n\}$

Т.к. в ε – окрестности x' и x'' лежит б.м. элементов, то

$x', x'' \in \left[x_N - \frac{\varepsilon}{2}; x_N + \frac{\varepsilon}{2}\right] \Rightarrow |x' - x''| \leq \varepsilon \Rightarrow x' = x'' = a \Rightarrow x_n \rightarrow a$. (в силу вышедоказанной теореме).

Теорема доказана.

Билет 9

Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предельного значения функции.

Функция $y = f(x)$ задана на множестве $\{X\}$, если каждому значению переменной x из множества $\{X\}$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число y .

$$\begin{aligned} \{X\} &\subset R \\ \forall x \in \{X\} &\rightarrow^f y \in R (y = f(x)) \end{aligned}$$

x называют независимой переменной, $\{X\}$ – областью задания функции, множество всех частных значений y функции – $\{y\}$ – областью изменения функции (множеством всех значений функции).

$$\begin{aligned} f(x) \text{ ограничена на } \{X\} &\leftrightarrow \exists M > 0: \forall x \in \{X\} \Rightarrow |f(x)| \leq M. \\ \bar{f} = \sup_{\{x\}} f(x) &\leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \leq \bar{f} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) > \bar{f} - \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Определение предела по Гейне.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \leftrightarrow \forall \{x_n\} \in \{x\}, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$$

Определение предела по Коши.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \{X\} 0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Теорема 1. Определения предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.

Доказательство:

1. Пусть выполнено определение по Коши. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x \in \{X\} 0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

Выберем $\forall x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon): 0 <$

$$|x_n - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x_n) - b| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

2. Пусть выполнено определение по Гейне. Предположим, что определение по Коши не выполнено. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta < 0 \exists x = x(\delta): |x - a| \leq \delta, |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n: 0 < |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow a$ (т. к. меньше наперёд заданного δ). Тогда, по определению по Гейне $f(x_n) \rightarrow b$, но при этом по нашему предположению справедливо неравенство $|f(x) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ определение по Коши выполнено.

Теорема доказана.

Определения (по Гейне). Число b называется **правым** (левым) **пределом** функции $f(x)$, если: $(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ [} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{]})$

$$\forall x_n \in \{x\}, x_n \rightarrow a, x_n > a \text{ (} x_n < a \text{)} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

Число b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если: $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b)$

$$\forall x_n \in \{x\}, x_n \rightarrow \infty, \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

Определения (по Коши). Число b называется **правым** (левым) **пределом** функции $f(x)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \{X\} 0 < a - x \leq \delta \text{ (} 0 < x - a \leq \delta \text{)} \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Число b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0: \forall x \in \{X\} |x| \geq M \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Критерий Коши существования предельного значения функции:

Функция $f(x)$ имеет предел $\Leftrightarrow$ она удовлетворяет условию Коши.

Условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \{X\} \begin{matrix} 0 < |x' - a| \leq \delta \\ 0 < |x'' - a| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$$

Доказательство:

1. **Необходимость.**

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \begin{matrix} \forall x': 0 < |x' - a| \leq \delta \\ \forall x'': 0 < |x'' - a| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} |f(x') - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x'') - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + (b - f(x''))| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ выполняется условие Коши.

2. **Достаточность.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \{X\} \begin{matrix} 0 < |x' - a| \leq \delta \\ 0 < |x'' - a| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow \exists N(\varepsilon): \begin{matrix} \forall n \geq N \Rightarrow 0 < |x_n - a| \leq \delta \\ \forall m \geq N \Rightarrow 0 < |x_m - a| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| \\ = |y_n - y_m| \leq \varepsilon \Rightarrow \{y_n\} = \{f(x_n)\} - \text{фундаментальная} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b. \end{aligned}$$

Покажем, что если $\lim_{x'_n \rightarrow a} f(x'_n) = \lim_{x''_n \rightarrow a} f(x''_n)$.

Пусть $\lim_{x'_n \rightarrow a} f(x'_n) = \lim_{x''_n \rightarrow a} f(x''_n)$ $\Rightarrow$ выделим следующий набор переменных $x_n: x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$, причём как подпоследовательность последовательности $x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$.

Но $f(x'_n), f(x''_n)$ - подпоследовательности $f(x_n) \Rightarrow \begin{matrix} f(x'_n) \rightarrow b \\ f(x''_n) \rightarrow b \end{matrix}$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Замечание: аналогично можно доказать для случая левого и правого пределов в т. а (элементы последовательно меньше/больше а) и для случая бесконечно большого х (бесконечно большие последовательности).

Билет 10

Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие (в данной точке) функции и принципы их сравнения.

Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $\{x\}$ и имеют в т. а пределы, равные b и c . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) * g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) имеют соответственно пределы $b \pm c$, $b * c$, $\frac{b}{c}$ ($c \neq 0$).

Доказательство:

Возьмём отдельную последовательность функции $x_n, x_n \rightarrow a, x_n \neq a$.

$$f(x_n) \rightarrow b, g(x_n) \rightarrow c \Rightarrow \begin{matrix} f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow b \pm c \\ f(x_n) * g(x_n) \rightarrow b * c \\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{b}{c} \end{matrix}, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание: аналогично можно доказать для случая левого и правого пределов в т. а (элементы последовательно меньше/больше a) и для случая бесконечно большого x (бесконечно большие последовательности).

Теорема доказана.

Следствие 1. Многочлен $P_n(x)$ имеет предел в $\forall$ т. а, $\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a)$.
 $(\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} (b_0 + b_1 * x + \dots + b_n * x^n) = b_0 + b_1 * a + \dots + b_n * a^n = P_n(a).$

Следствие 2. $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P_n(x)}{(\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x))} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = R(x); (Q_m(x) \neq 0)$

Теорема о предельном переходе в неравенствах.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности т. а, $f(x) \rightarrow b, g(x) \rightarrow c$ при $x \rightarrow a$, при этом $\forall x \in \{x\} f(x) \geq g(x) \Rightarrow b \geq c$.

Доказательство:

Выделим подпоследовательность $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$. По условию $f(x_n) \rightarrow b, g(x_n) \rightarrow c$ и для $\forall n f(x_n) \geq g(x_n) \Rightarrow$ по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей $b \geq c$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Бесконечно малая функция в т. a – функция, предел которой в точке a равен 0.

$$f(x) - \text{б. м. в т. } a \leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Из теоремы об арифметических операциях над функциями вытекает, что, если $f(x) \rightarrow b \neq 0$ при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) = f(x) - b$ – бесконечно малая функция $\Rightarrow f(x) = b + \alpha(x)$.

Бесконечно большая функция в т. a справа (слева) – функция такая, что для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, все элементы которой больше (меньше) a , соответствующая последовательность значений функции $\{A(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

$$f(x) - \text{б. б. в т. } a \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \text{ т. е.}$$

$$\forall M > 0 \exists \delta(M) > 0: \forall x: 0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \geq M$$

Рассмотрим методику сравнения бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – определены на $\{x\}$ и бесконечно малые в т. a .

1. $\alpha(x)$ является в точке a бесконечно малой более высокого порядка (имеет более высокий порядок малости), чем $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

2. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a бесконечно малыми одного порядка (имеют одинаковый порядок малости), если:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K = \text{const}, K \neq 0.$$

3. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a эквивалентными бесконечно малыми, если:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Аналогично сравниваются и бесконечно большие в данной точке a справа (слева) функции.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – определены на $\{x\}$ и бесконечно большие справа от т. a .

$$\left(\lim_{x \rightarrow a+0} A(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a+0} B(x) = +\infty \text{ для определённости} \right)$$

1. $A(x)$ имеет в точке a справа более высокий порядок роста, чем $B(x)$, если $\frac{A(x)}{B(x)}$ — бесконечно большая справа от a :

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{A(x)}{B(x)} = +\infty$$

2. $A(x)$ и $B(x)$ имеют одинаковый порядок роста в точке a справа, если:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{A(x)}{B(x)} = K = \text{const}, K \neq 0.$$

Билет 11

**Понятие непрерывности функции в точке и на множестве.
Арифметические операции над непрерывными функциями.
Классификация точек разрыва.**

Определение непрерывности функции в точке по Гейне:

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке a , если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента соответствующая последовательность значений функции сходится к числу $f(a)$.

$$\forall x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a);$$

Определение непрерывности функции в точке по Коши:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a) > 0: \forall x: |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Из теоремы об эквивалентности определений предела по Гейне и по Коши следует, что определения непрерывности функции по Гейне и по Коши так же эквивалентны.

Непрерывность справа (слева) по Гейне:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a справа (слева), если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента, удовлетворяющих условию $x_n > a$ ($x_n < a$), соответствующая последовательность значений функции сходится к числу $f(a)$.

$$\forall x_n \rightarrow a + 0 \ (a - 0) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a);$$

Непрерывность справа (слева) по Коши:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a справа (слева), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x , удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$), справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a) > 0: \forall x: a < x < a + \delta \ (a - \delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Будем также говорить, что функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функция непрерывна на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого сегмента и, кроме того, непрерывна справа в точке a и слева в точке b .

Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями:

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $\{x\}$ и непрерывны в т. а. Тогда функции $f(x) \pm g(x), f(x) * g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) непрерывны в т. а.

Доказательство:

Т. к. $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в т. а, то они имеют в ней пределы, соответственно равные $f(a)$ и $g(a)$. Но тогда, по т. об арифметических операциях над пределами, существуют пределы функций $f(x) \pm g(x), f(x) * g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$, соответственно равные $f(a) \pm g(a), f(a) * g(a), \frac{f(a)}{g(a)}$.

Однако эти величины являются частными значениями функций в т. а $\Rightarrow$ по определению функции непрерывны в т. а, ч. т. д.

Теорема доказана.

Точка разрыва – точка, в которой данная функция не обладает свойством непрерывности.

Существует 3 типа точек разрыва:

1. **Устранимый разрыв.** Точка a называется устранимым разрывом функции $y = f(x)$, если предел функции $f(x)$ в точке a существует, но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо имеет частное значение $f(a)$, отличное от предела $f(x)$ в этой точке.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \quad [\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq f(a)]$$

Пример: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \Rightarrow$ не определено $f(3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(3) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(3) \neq f(3) \Rightarrow$ пусть $f(3) = 6$.

2. **Разрыв 1-го рода (т. н. скачок функции).** Точка a называется разрывом функции $y = f(x)$ 1-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x).$$

Пример: $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow [\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sgn}(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0-0} \text{sgn}(x) = -1]$.

3. **Разрыв 2-го рода.** Точка a называется разрывом функции $y = f(x)$ 2-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного

из односторонних пределов или если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

$$a - \text{точка разрыва 2-го рода, если:} \left[\begin{array}{l} \nexists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \\ \nexists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \end{array} \right.$$

Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$. В т. 0 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(0) = +\infty$

Билет 12

Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции.

Локальные свойства – те свойства функции, которые справедливы в сколь угодно малой окрестности фиксированной точки области определения функции.

$f(x)$ ограничена сверху (снизу) на $\{X\} \leftrightarrow \exists M (m): \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \leq M (f(x) \geq m)$

$$\bar{f} = \sup f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \leq \bar{f} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) > \bar{f} - \varepsilon. \end{cases}$$

$$\underline{f} = \inf f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \geq \underline{f} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) < \underline{f} + \varepsilon. \end{cases}$$

$f(x)$ ограничена на $\{X\} \leftrightarrow \exists M > 0: \forall x \in \{X\} \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности x' , $\exists$ конечный $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0: f(x) -$ ограничена в δ – окрестности x' .

Доказательство:

1. Фиксируем $\varepsilon \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in \delta_{\text{окр}} \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon;$
 $b - \varepsilon < f(x) \leq b + \varepsilon$

В случае, если $a \notin \{x\} \Rightarrow$ теорема доказана, т. к. все $f(x)$ ограничены.

Если $a \in \{x\} \Rightarrow m = \min(b - \varepsilon; f(a)), M = \max(b + \varepsilon, f(a)).$

Следовательно, $m \leq f(x) \leq M$ (включаем случай $f(x) = f(a)$).

Теорема доказана.

Следствие: если функция $f(x)$ непрерывна в т. а, то эта функция ограничена на множестве всех её значений аргумента, принадлежащих некоторой окрестности т. а. ($f(x)$ – непрерывна $\Rightarrow$ имеет конечный предел $\Rightarrow$ сведение к теореме выше)

Теорема о сохранении знака непрерывной в точке функции.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности т. а, $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$),

$f(x)$ непрерывна в а $\Rightarrow$ в окрестности а $\exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta; a + \delta)$
 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Доказательство:

$f(a) > 0$. Пусть $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta; a + \delta)$
 $\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} = \varepsilon$ (ввиду непрерывности $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, откуда
и вытекают представленные неравенства (по определению)).

Тогда $0 < \frac{f(a)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3f(a)}{2} \Rightarrow: \forall x \in (a - \delta; a + \delta) f(x) > 0$, ч. т. д.

Если $f(a) < 0$, то $\varepsilon = -\frac{f(a)}{2} > 0 \Rightarrow \frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Сложная функция – функция, полученная суперпозицией двух или нескольких функций.

Пусть $x = \varphi(t)$ задана на множестве $\{t\}$, $\{x\}$ – множество её значений. Если на множестве $\{x\}$ задана функция $y = f(x)$, то говорят, что на множестве $\{t\}$ задана сложная функция $y = f[\varphi(t)] = F(t)$ или $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$.

Теорема о непрерывности сложной функции.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в т. а, $y = f(x)$ непрерывна в т. $b = \varphi(a)$. Тогда $y = f[\varphi(t)]$ непрерывна в т. а.

Доказательство:

$$\forall t_n \rightarrow a;$$

Т. к. $\varphi(t)$ непрерывна в т. а $\Rightarrow x_n = \varphi(t_n) \rightarrow b = \varphi(a)$ (по Гейне).

Т. к. $f(x)$ непрерывна в т. $b = \varphi(a)$, а $x_n \rightarrow b \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(b) = f[\varphi(a)]$
(по Гейне)

$\forall t_n \rightarrow a \Rightarrow f(x) = f[\varphi(t_n)] \rightarrow f[\varphi(a)] \Rightarrow$ по Гейне $f(x)$ –
непрерывна, ч. т. д.

Теорема доказана.

Билет 13

Обратная функция. Условия непрерывности монотонных функций и обратных функций.

Обратная функция к функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$ и с множеством значений $[\alpha, \beta]$ – такая функция, для которой каждому y из сегмента $[\alpha, \beta]$ ставит в соответствие по некоторому закону лишь одно значение x из сегмента $[a, b]$, для которого $f(x) = y$. Эта функция обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Пусть $x \in [a, b], f(x) \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \forall y \in [\alpha, \beta] \exists! x \in [a, b]: f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y)$ – обратная к $f(x)$ функция.

Если $x = f^{-1}(y)$ – обратная к $f(x)$, то $y = f(x)$ – обратная к $x = f^{-1}(y)$. По этой причине такие функции называются взаимно обратными. Очевидно, $f[f^{-1}(y)] = y, f^{-1}[f(x)] = x$.

Функция $f(x)$ называется **неубывающей [невозрастающей]** на множестве $\{x\}$, если для любого x_1, x_2 из этого множества таких, что $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ [$f(x_1) \leq f(x_2)$].

$\forall x_1, x_2 \in \{X\}: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(x)$ – неубывающая на $\{X\}$.

$\forall x_1, x_2 \in \{X\}: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x)$ – невозрастающая на $\{X\}$

Функция $f(x)$ называется **монотонной**, если она неубывающая или невозрастающая.

Функция $f(x)$ называется **убывающей [возрастающей]** на множестве $\{x\}$, если для любого x_1, x_2 из этого множества таких, что $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$].

$\forall x_1, x_2 \in \{X\}: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ – убывающая на $\{X\}$.

$\forall x_1, x_2 \in \{X\}: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x)$ – возрастающая на $\{X\}$

Функция $f(x)$ называется **строго монотонной**, если она убывающая или возрастающая.

Лемма. Пусть $y = f(x)$ монотонна на $[a; b] \Rightarrow \forall c \in [a; b] \exists f(c+0)$ [или $\exists \lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$]; $\forall c \in (a; b) \exists f(c-0)$ [или $\exists \lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$]

Доказательство:

Пусть $f(x)$ не убывает. Положим, что $\{X\} = (c; b]$.

$\forall x \in \{X\} \Rightarrow f(c) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow \exists \inf(f(\{X\})) = \gamma \geq f(c)$, или иными словами: у множества значений функции на множестве $\{X\}$ есть инфимум (т. к. оно ограничено снизу) $\Rightarrow$ значение инфимума не меньше $f(c)$.

Покажем, что $\gamma = f(c + 0)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = x' - c > 0, \exists x' \in (c; b]: \gamma \leq f(x') < \gamma + \varepsilon$$

$\delta = x' - c \Rightarrow$ промежутки $(c; c + \delta)$ и $(c; x')$ совпадают $\Rightarrow$

$$\gamma \leq f(x) \leq f(x') \leq \gamma + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \gamma| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \gamma = f(c + 0) \geq f(c), \text{ то есть}$$

$$\forall C \in [a; b) \exists \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c + 0)$$

Абсолютно аналогично доказывается для $\{X\} = [a; c)$, что

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c - 0) \leq f(c)$$

Таким же способом приводится доказательство для невозрастающей функции, но знаки неравенств меняются на противоположные. **Лемма доказана.**

Теорема. Пусть $y = f(x)$ монотонна и непрерывна на $[a; b] \Leftrightarrow f(x)$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

$y = f(x)$ – неубывающая (невозрастающая), $f(x) \in C[a; b] \Leftrightarrow$

$$\forall \gamma \in [f(a); f(b)] (\forall \gamma \in [f(b); f(a)]) \exists c: f(c) = \gamma.$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает и непрерывна на $[a; b]$, а множество $\{X\}$ – множество значений $f(x)$ на $[a; b]: f(x) \leq \gamma \Rightarrow \exists \sup\{X\} = c$, т. к. $\{X\}$ непустое и ограничено сверху.

Если $x < c \Rightarrow \exists x' \in (x; c]: f(x') \leq \gamma \Rightarrow$ т. к. $f(x)$ не убывает, то $f(x) \leq f(x') \leq \gamma$. Если же $x > c$, то $f(x) \geq \gamma$, т. к. $f(x)$ не убывает, $x \notin \{X\}$.

Докажем, что c – внутренняя точка $[a; b]$. Предположим, что это не так и $c = b$. Тогда

$\forall$ возрастающей $\{x_n\} \rightarrow c = b, \{x_n\} \in [a; b]. \forall x_n < c \Rightarrow f(x_n) \leq \gamma \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \gamma. \text{ Но } f(x) \text{ непрерывна в } c = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(b) \Rightarrow f(b) \leq$$

$$\gamma \Rightarrow \text{противоречие условию } f(b) > \gamma (f(b) \neq \gamma) \Rightarrow$$

предположение неверно $\Rightarrow c \neq b$. Случай же $f(b) = \gamma =$

$f(c)$ сразу доказывает необходимое утверждение.

Аналогично предположим, что $c = a$ и аналогично

$$\forall \text{ убывающей } \{x_n\} \rightarrow c, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \gamma. \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \Rightarrow f(a) \geq \gamma \Rightarrow$$

противоречие условию $f(a) < \gamma$ ($f(a) \neq \gamma$) $\Rightarrow c$ – внутренняя точка $[a, b]$.

Рассмотрим возрастающую последовательность $\{x'_n\} \rightarrow c$ и убывающую $\{x''_n\} \rightarrow c$. Т.к. $f(x)$ непрерывна в c , то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(c)$. С другой стороны, $\forall n \ x'_n < c < x''_n \Rightarrow f(x'_n) \leq \gamma, f(x''_n) > \gamma \Rightarrow$ в силу доказанной леммы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(c) \leq \gamma, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(c) \geq \gamma \Rightarrow f(c) = \gamma$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f(x)$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$. Пусть $y = f(x)$ не убывает. Пусть $f(x)$ не является непрерывной $\Rightarrow \exists c: f(c+0) \neq f(c)$ или $f(c-0) \neq f(c)$. Пусть для определённости $f(c+0) \neq f(c) \Rightarrow f(c+0) > f(c)$.

$$\forall x \in [a; c] \Rightarrow f(x) \leq f(c);$$

$$\forall x \in (c; b] \Rightarrow f(x) \geq f(c+0) = \inf(f(x)) \text{ при указанных } x.$$

$\forall \gamma \in (f(c); f(c+0)) \subset [f(a); f(b)] \Rightarrow \nexists x: f(x) = \gamma \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow f(x)$ – непрерывна. Абсолютно аналогично доказывается и для левого предела $f(c-0)$. По такому же принципу рассматривается случай невозрастающей последовательности.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна на сегменте $[a, b]$, а $[f(a); f(b)]$ (или $[f(b); f(a)]$) – область значений $\Rightarrow$ на сегменте $[f(a); f(b)]$ (или $[f(b); f(a)]$) $\exists!$ $x = f^{-1}(y)$ того же характера монотонности.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ возрастает (для убывающей функции меняются лишь знаки неравенств).

$\forall y \in [f(a); f(b)] \exists x \in [a; b]: f(x) = y$ по определению обратной функции.

Докажем единственность.

Пусть $x', x'' \in [a, b], x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'') \Rightarrow f(x') \neq f(x'') \Rightarrow \forall y \exists! x \in [a, b]: f(x) = y$.

Докажем, что характер монотонности функций одинаков.

$$\forall y', y'' \in [f(a), f(b)], y' < y'', x' = f^{-1}(y') \text{ и } x'' = f^{-1}(y'').$$

Предположим, что $x' \geq x'' \Rightarrow f(x') = y' \geq f(x'') = y'' \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow y' < y'' \Rightarrow f^{-1}(y') < f^{-1}(y'') \Rightarrow f^{-1}(y)$ возрастает.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на сегменте $[a, b]$, а $[f(a); f(b)]$ (или $[f(b); f(a)]$) – область значений $\Rightarrow$ на сегменте $[f(a); f(b)]$ (или $[f(b); f(a)]$) $\exists! x = f^{-1}(y)$, непрерывная и того же характера монотонности.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ возрастает и непрерывна $\Rightarrow$ по критерию непрерывности монотонной функции $f(x)$ принимает все значения на $[f(a); f(b)] \Rightarrow \exists! x = f^{-1}(y)$ – возрастающая, для которой $[a, b]$ – область значений $\Rightarrow$ по тому же критерию $x = f^{-1}(y)$ непрерывна.

Теорема доказана.

Билет 14

Простейшие элементарные функции и их основные свойства

Простейшими элементарными функциями обычно называют функции

$$y = x^a, y = a^x, y = \log_a x, y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, \\ y = \operatorname{arcsin} x, y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x, \\ y = \operatorname{ch}(x), y = \operatorname{sh}(x), y = \operatorname{th}(x), y = \operatorname{cth}(x).$$

1. Функции $y = x^a$, $y = a^x$ и $y = \log_a x$.

Для определения этих функций в ходе рассуждений необходимо будет определить понятие вещественной степени числа. Кроме того, следует ввести ограничения на x и a : $x, a > 0$. Это сделано для отсутствия неопределённости при возведении числа в произвольную степень.

Для $a \in \mathbb{N}$ функция $y = x^a$ считается определённой: под её значением понимается число x , умноженное само на себя N раз. Покажем, что при $a \in \mathbb{N}$ функция непрерывна и возрастает.

Функция непрерывна, поскольку $\lim_{x \rightarrow a} x^a = a^a$ ($a \in \mathbb{N}$).

Пусть $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1^a - x_2^a = (x_1 - x_2)(x_1^{a-1} + x_1^{a-2}x_2 + \dots + x_2^{a-1}) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \forall x_1, x_2: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ функция возрастает.

Так как функция возрастает и непрерывна, то $\exists! x = f^{-1}(y)$ при $x \in [0; N]$ и при $y \in [0; N^a] \Rightarrow x(a) \stackrel{\text{def}}{=} x^{\frac{1}{a}}$. Ввиду того, что N можно выбрать бесконечно большим, то и N^a также будет бесконечно большим.

Кроме того, положим, что $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, $a^0 = 1$, $a^{-a} = \left(\frac{1}{a}\right)^a$. Таким образом, определена любая рациональная степень числа $a > 0$. Докажем основные свойства рациональной степени положительных вещественных чисел.

$$1. a^p * a^q = a^{p+q}. \quad p = \frac{m_1}{n_1}, q = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow a^p * a^q = a^{\frac{m_1}{n_1}} * a^{\frac{m_2}{n_2}} = \\ = a^{\frac{m_1 * n_2}{n_1 * n_2}} * a^{\frac{m_2 * n_1}{n_2 * n_1}} = \left(a^{\frac{1}{n_1 * n_2}}\right)^{m_1 * n_2} * \left(a^{\frac{1}{n_1 * n_2}}\right)^{m_2 * n_1} = \\ = \left(a^{\frac{1}{n_1 * n_2}}\right)^{m_1 * n_2 + m_2 * n_1} \quad (\text{как целые числа}) = a^{p+q}.$$

$$2. (a^p)^q = a^{(p*q)}. \quad p = \frac{m}{n}, \forall q \in \mathbb{N}: (a^p)^q = (a^{\frac{m}{n}})^q = \left(a^{\frac{\operatorname{sgn}(m)}{n}}\right)^{|m|*q} = a^{(p*q)}.$$

Докажем для $q \in Q$. Пусть $b_1 = (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}}, b_2 = a^{\frac{m_1 * m_2}{n_1 * n_2}}$. Пусть $b_1 \neq b_2$. Тогда для $f(x) = x^{n_2} (x > 0)$ $(x^{\frac{m_1}{n_1}})^{m_2} \neq x^{\frac{m_1 * m_2}{n_1}}$, что противоречит уже доказанному равенству $\Rightarrow (a^p)^q = a^{(p*q)}$.

3. $a^p * b^p = (a * b)^p$. Ввиду уже доказанных свойств $\left(a^{\frac{sgn(m)}{n}}\right)^n = a^{sgn(m)}$, $\left(b^{\frac{sgn(m)}{n}}\right)^n = b^{sgn(m)}, \left((ab)^{\frac{sgn(m)}{n}}\right)^n = (ab)^{sgn(m)}$. Положив, что $c_1 = a^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{1}{n}}$, $c_2 = (ab)^{\frac{1}{n}}$ и предполагая, что $c_1 \neq c_2$, получим, что $c_1^n \neq c_2^n \Rightarrow a^{sgn(m)} * b^{sgn(m)} \neq (ab)^{sgn(m)} \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a^p * b^p = (a * b)^p$.

4. При $a > 1$: а) $a^p > 0$; б) $a^p > 1$ при $p > 0$; в) $a^p = f(p)$ – возрастающая.

а) $a^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > 0$ по определению.

б) Пусть $a^p \leq 1 \Rightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \leq 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a^p > 1$.

в) $p', p'' \in Q, p' < p''$.

$f(p'') - f(p') = a^{p''} - a^{p'} = a^{p'} * (a^{p''-p'} - 1) > 0 \Rightarrow f(p)$ возрастает.

Отметим, что при нечётном n можно определить возведение в степень и для отрицательных чисел: $(-a)^p = \begin{cases} a^p, & \text{если } p - \text{чётное} \\ -a^p, & \text{если } p - \text{нечётное} \end{cases}$

Определим, наконец, $f(x) = a^x$ для $\forall x \in R$.

Определим число a^x : $\forall \alpha, \beta \in Q: \alpha < x < \beta \Rightarrow a^\alpha < a^x < a^\beta$.

Утверждение. $\forall x, a \in R, \forall \alpha, \beta \in Q: \alpha < x < \beta \exists! y = a^x \in R$.

Доказательство:

Существование. Фиксируем произвольное $\beta^* \geq x \Rightarrow \forall \alpha \leq x \Rightarrow \alpha \leq \beta^*$. $\forall \alpha \leq x \Rightarrow a^\alpha \leq a^{\beta^*} \Rightarrow \{a^\alpha\}$ ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup\{a^\alpha\} = y$, поскольку $y \geq a^\alpha \forall \alpha \in Q: \alpha \leq x, y \leq a^{\beta^*} \forall \beta^* \geq x, \beta^* \in Q$.

Единственность. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что $\exists \alpha, \beta \in Q: \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq a^\beta - a^\alpha \leq \varepsilon$.

Фиксируем $\beta^* > x \Rightarrow a^\beta - a^\alpha = a^\alpha * (a^{\beta-\alpha} - 1) \leq a^{\beta^*} * (a^{\beta-\alpha} - 1) \leq \varepsilon$.

В свою очередь $\exists \alpha, \beta: a^{\beta-\alpha} - 1 \leq \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{a^{\beta^*}}$. Покажем это.

$\forall n \in N \exists \alpha, \beta \in Q: \alpha \leq x \leq \beta, \beta - \alpha \leq \frac{1}{n} \Rightarrow a^{\beta-\alpha} - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 = \delta_n \leq \varepsilon^*$.

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n \Rightarrow a = (1 + \delta_n)^n > 1 + n * \delta_n \Rightarrow$$

$$n * \delta_n < a - 1 \Rightarrow 0 \leq \delta_n < \frac{a - 1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n: \delta_n \leq \varepsilon^* \Rightarrow$$

$\exists \alpha, \beta \in Q: \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq a^\beta - a^\alpha \leq \varepsilon \Rightarrow$ по свойству вещественных чисел

$$\forall y', y'' \in R: a^\alpha \leq y', y'' < a^\beta \Rightarrow |y' - y''| \leq a^\beta - a^\alpha \leq \varepsilon \Rightarrow y' = y'' \Rightarrow$$

$\exists! y = a^x \in R$. **Утверждение доказано.**

Утверждение. $y = a^x$ при $a > 1, x \in (-\infty; +\infty)$ возрастает.

Доказательство:

$$\forall x', x'' \in R: x' < x'' \exists \beta', \alpha'' \in Q: x' < \beta' < \alpha'' < x'' \Rightarrow a^{x'} \leq a^{\beta'} < a^{\alpha''} \leq a^{x''} \text{ по определению} \Rightarrow a^{x'} < a^{x''}. \text{ Утверждение доказано.}$$

Утверждение. $y = a^x$ при $a > 1, x \in (-\infty; +\infty)$ непрерывна.

Доказательство:

Пусть x – произвольное вещественное число, $\{x_n\} \rightarrow x$.

Фиксируем $\varepsilon > 0, \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon): \alpha < x < \beta, a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$.

Т. к. $\{x_n\} \rightarrow x$, то $\exists N: \forall n \geq N \alpha < x_n < \beta$. Из возрастания $y = a^x \Rightarrow$

$$a^\alpha < a^x < a^\beta, a^\alpha < a^{x_n} < a^\beta \forall n \geq N \Rightarrow \forall n \geq N |a^{x_n} - a^x| < \varepsilon \Rightarrow$$

по Гейне функция $f(x) = a^x$ непрерывна для $\forall x \in R$, т. е. при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Утверждение доказано.

Определим также $y = a^x$ при $0 < a < 1$ как $y = b^{-x}$, где $b = \frac{1}{a}$. Нетрудно заметить, что такая функция будет убывающей.

Следствие 1. $y = a^x$ положительна при $a > 0 \forall x \in R$.

Действительно, $\forall p \in R a^p > 0$ (по определению степени) $\Rightarrow \forall x > p$: как возрастающая функция $a^x > a^p > 0 \Rightarrow a^x > 0$. Ввиду справедливости этого утверждения мы можем утверждать, что при $0 < a < 1$

$f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ тоже будет непрерывной и положительной.

Следствие 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ при $0 < a < 1$.

$a > 1 \Rightarrow a = 1 + \delta, \delta > 0 \Rightarrow a^x = (1 + \delta)^x > x\delta \Rightarrow$ т. к. a^x возрастает:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty. \text{ Так как } (a^{-x}) = \frac{1}{a^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0. \text{ Для функции при}$$

$0 < a < 1$ искомые равенства следуют из её определения.

Следствие 3. $\forall \gamma > 0 \exists c \in R: f(c) = \gamma$, где $f(x) = a^x$.

Это прямое следствие критерия непрерывности монотонной функции: т. к. $f(x)$ непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ (при $a > 1$) $\Rightarrow \forall \gamma \in (0; +\infty) \exists c \in R: a^c = \gamma$. Аналогична ситуация и для $a \in (0; 1)$.

Следствие 4. $\forall p, q \in R: a^p * a^q = a^{p+q}, (a^p)^q = a^{(p*q)}, a^p * b^p = (a * b)^p$.

$$\begin{aligned} \forall p, a \in R, \forall \alpha_1, \beta_1 \in Q: \alpha_1 \leq p \leq \beta_1 &\Rightarrow a^{\alpha_1} \leq a^p \leq a^{\beta_1} \\ \forall q, a \in R, \forall \alpha_2, \beta_2 \in Q: \alpha_2 \leq q \leq \beta_2 &\Rightarrow a^{\alpha_2} \leq a^q \leq a^{\beta_2} \\ \forall p, q \in R, \forall \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in Q: \alpha_1 + \alpha_2 \leq p + q \leq \beta_1 + \beta_2 &\Rightarrow \\ \exists! a^{p+q} = a^p * a^q: a^{\alpha_1} * a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1 + \alpha_2} \leq a^{p+q} \leq a^{\beta_1 + \beta_2} &= a^{\beta_1} * a^{\beta_2} \end{aligned}$$

Данное свойство также можно доказать и через последовательности. Пускай

$$\{x'_n\} \rightarrow p, \{x''_n\} \rightarrow q, \{x'_n\}, \{x''_n\} \in Q \Rightarrow a^{\{x'_n\}} * a^{\{x''_n\}} = a^{\{x'_n\} + \{x''_n\}} \Rightarrow a^p * a^q = a^{p+q}$$

$$(a^{\{x'_n\}})^{\{x''_n\}} = a^{\{x'_n\} * \{x''_n\}} \Rightarrow (a^p)^q = a^{(p*q)}$$

$$a^{\{x'_n\}} * b^{\{x'_n\}} = (ab)^{\{x'_n\}} \Rightarrow a^p * b^p = (a * b)^p.$$

Итак, продублируем **основные свойства** показательной функции ($a > 0$):

- 1) Определена и непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 2) $f(x) \in (0; +\infty)$ при $a \neq 1$;
- 3) Возрастает при $a > 1$, убывает при $a < 1$, константа при $a = 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ при $0 < a < 1$.
- 5) Для $f(x)$ выполняются основные свойства вещественной степени:
 $a^p * a^q = a^{p+q}, (a^p)^q = a^{(p*q)}, a^p * b^p = (a * b)^p, a^0 = 1$.
- 6) Функция не имеет глобальных точек экстремума.

Введём **логарифмическую функцию** как обратную к показательной на произвольном сегменте $[x_1; x_2]$. Соответственно, она будет определена на сегменте $[a^{x_1}; a^{x_2}]$: $f^{-1}(y) = \log_a y$. Запишем функцию в виде $f(x) = \log_a x$. Её **свойства** следуют из определения ($a > 0, a \neq 1$):

- 1) Определена и непрерывна при $x \in (0; +\infty)$;
- 2) $f(x) \in (-\infty; +\infty)$;
- 3) Для $\forall x \in (0; +\infty)$ возрастает при $a > 1$, убывает при $a < 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\log_a x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = +\infty$ при $a > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\log_a x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = -\infty$ при $0 < a < 1$.
- 5) Для $f(x) = \log_a x$ справедливы следующие равенства ($\forall x_1, x_2 > 0$)

$\log_a 1 = 0$; $\log_a(x_1 * x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$; $\log_a(x_1^{x_2}) = x_2 * \log_a x_1$;
 6) Функция не имеет глобальных точек экстремума.

Отдельно стоит отметить функцию $y = \log_e x$, где $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Для неё существует особое обозначение: $y = \ln(x)$. Данный логарифм называют **натуральным**.

Наконец, определим степенную функцию $y = x^\alpha \forall \alpha \in R$ как суперпозицию показательной и логарифмических функций при $x > 0$:

$$y = x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha * \log_a x}, \text{ где } a > 1, a \in R;$$

Отсюда и вытекают её свойства:

- 1) Определена и непрерывна при $x \in (0; +\infty)$ (по т. о непрерывности сложной функции, так как $u = \alpha * \log_a x$ непрерывна при $x > 0$, а функция $y = a^u$ непрерывна для $\forall u$)
- 2) Для $\forall x \in (0; +\infty)$ возрастает при $\alpha > 0$, убывает при $\alpha < 0$.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0 \text{ при } \alpha > 0$$

$$(\forall \{x_n\} \rightarrow 0+0, \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_a x_n) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0 \text{ при } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = +\infty \text{ при } \alpha < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = +\infty \text{ при } \alpha < 0;$$

Тогда пусть по определению $0^\alpha = 0$ при $\alpha > 0$, а при $\alpha \leq 0$ выражение не определено.

Замечание. Функцию также можно определить и для $x < 0$, если $\alpha \in R$, $\alpha = \frac{m}{n}$, где n – нечётное. Тогда $x^\alpha: \begin{cases} y = |x|^\alpha, \text{ если } m - \text{чётное} \\ y = -|x|^\alpha, \text{ если } m - \text{нечётное} \end{cases}$.

2. Тригонометрические функции.

Существует несколько способов задания тригонометрических функций.

Один из них – использование наглядных геометрических соображений и единичной окружности. Однако при таком определении возникают некоторые логические пробелы.

Логически безупречно $\sin(x)$ и $\cos(x)$ можно определить как решение системы некоторых функциональных уравнений, или, вернее, как функции, отвечающие следующим условиям:

$$1) \begin{cases} f(x' + x'') = f(x') * g(x'') + f(x'') * g(x') \\ g(x' + x'') = g(x') * g(x'') - f(x') * f(x'') \\ f^2(x) + g^2(x) = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$3) \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ то } 0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)}$$

Можно доказать, что такие функции существуют, и притом единственные.

Доказательство:

Сначала докажем единственность.

Единственность.

Для доказательства единственности достаточно доказать следующие 2 утверждения:

- 1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 2) Значения $f(x)$ и $g(x)$ определяются единственным образом на $\{x\}: \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \{x\} \exists \infty x': |x' - x| < \varepsilon, x' \in \{x\}$ (всюду плотном множестве).

Действительно, из 1-го утверждения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

$\forall a \in \{x\}$. Тогда пусть $x_n \rightarrow a, x_n \in \{x\} \Rightarrow f(x_n)$ и $g(x_n)$ определяются единственным образом из 2-го утверждения. Но тогда $\lim_{x_n \rightarrow a} f(x) = f(a),$

$\lim_{x_n \rightarrow a} g(x) = g(a)$ тоже определяются единственным образом $\Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ определены единственным образом.

Для начала установим справедливость некоторых формул.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x' + x'') = f(x') * g(x'') + f(x'') * g(x') \\ g(x' + x'') = g(x') * g(x'') - f(x') * f(x'') \end{cases} \Rightarrow \{x'' = -x'\} \Rightarrow \\ & \begin{cases} 0 = f(x') * g(-x') + f(-x') * g(x') \\ 1 = g(x') * g(-x') - f(x') * f(-x') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = f^2(x') * g(-x') + f(x') * f(-x') * g(x') \\ g(x') = g^2(x') * g(-x') - g(x') * f(x') * f(-x') \end{cases} \\ & g(x') = (f^2(x') + g^2(x')) * g(-x') \Rightarrow g(x') = g(-x') \Rightarrow g(x) - \text{чётная функция.} \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } \begin{cases} 0 = f(x') * g(x') * g(-x') + f(-x') * g^2(x') \\ -f(x') = -f(x') * g(x') * g(-x') + f^2(x') * f(-x') \end{cases} \Rightarrow -f(x') = f(x'), \text{ т. е. функция } f(x) - \text{нечётная.}$$

Функцию $f(x)$ назовём **чётной**, если $\forall x \in \{x\} f(x) = f(-x)$ и **нечётной**, если $\forall x \in \{x\} f(x) = -f(x)$;

$$\text{Тогда } f(x'') = f\left(\frac{x' + x''}{2} + \frac{x'' - x'}{2}\right) = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * g\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) + \\ + g\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * f\left(\frac{x'' - x'}{2}\right);$$

$$f(x') = f\left(\frac{x' + x''}{2} + \frac{x' - x''}{2}\right) = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * g\left(-\frac{x'' - x'}{2}\right) + g\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * f\left(-\frac{x'' - x'}{2}\right) = \\ = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * g\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) - g\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * f\left(\frac{x'' - x'}{2}\right);$$

$$\text{Отсюда } f(x'') - f(x') = 2g\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * f\left(\frac{x'' - x'}{2}\right);$$

Отметим также, что $f(x)$ и $g(x)$ ограничены: $|f(x)| \leq 1, |g(x)| \leq 1$, что вытекает из равенства $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

Теперь докажем непрерывность $f(x)$. Непрерывность в точке $x = 0$ справа следует из того факта, что $f(0) = 0$ и $0 < f(x) < x$ (т.е. $\forall x_n \rightarrow 0 + 0$ справедливо $0 < f(x_n) < x_n \Rightarrow$ по т. о двух эвольвентах $\{f(x_n)\} \rightarrow 0 = f(0)$). Но тогда из нечётности функции $f(x)$ непрерывна и слева в $0 \Rightarrow f(x)$ непрерывна в нуле.

Пусть тогда $x' = x$ (произвольная точка прямой), $x'' = x_n \rightarrow x$. Тогда:

$$f(x_n) - f(x) = 2g\left(\frac{x + x_n}{2}\right) * f\left(\frac{x_n - x}{2}\right);$$

При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{x_n - x}{2}\right)\right) = 0$. Ввиду ограниченности $g\left(\frac{x + x_n}{2}\right)$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \Rightarrow f(x)$ непрерывна в $\forall x \in R$.

Аналогично для функции $g(x)$: $g(0) = 1, 0 < x < \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$

$0 < x * g(x) < f(x) \Rightarrow x * g(x)$ непрерывна в т. 0 справа $\Rightarrow$

$g(x)$ непрерывна в т. 0 справа $\Rightarrow$ из чётности $g(x)$ непрерывна в т. 0.

Таким же образом, как и с $f(x)$, получаем соотношение:

$$g(x'') - g(x') = -2f\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) * f\left(\frac{x'' - x'}{2}\right);$$

И по такому же принципу доказываем, что $g(x)$ непрерывна в $\forall x \in R$.

Итак, $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на всей области определения. Докажем, что их значения определяются единственным образом в точках вида $\frac{p\pi}{2^n}$, где $p \in Z, p \neq 0, n \in N$. Данное множество удовлетворяет поставленному условию: поскольку любая точка $\frac{p\pi}{2^n}$ является вещественным числом, то

между двумя такими точками находится бесконечно много других вещественных чисел, которые также будут иметь такой вид.

Для начала докажем, что данные функции периодические.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если $f(x + T) = f(x)$. Число T называют **периодом** функции.

По формуле:

$$f(x + 2\pi) - f(x) = 2g(x + \pi) * f(\pi);$$

При этом $f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) * g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(x + 2\pi) = f(x)$, т. е. функция $f(x)$ – периодическая с периодом 2π , и $f(2\pi) = 0$.

$$g(\pi) = g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = g^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$g(2\pi) = g(\pi + \pi) = g^2(\pi) - f^2(\pi) = 1.$$

Тогда $g(x + 2\pi) = g(x) * g(2\pi) - f(x) * f(2\pi) = g(x)$, т. е. функция $g(x)$ тоже периодическая с периодом в 2π . Это позволяет ограничиться лишь рассмотрением сегмента $[0; 2\pi]$.

Из того, что $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, 0 < f(x) < x$ на при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а также из непрерывности $f(x)$ следует, что $f(x) \geq 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; кроме того, $f(\pi - x) = f(\pi) * g(-x) + f(-x) * g(\pi) = f(x)$. Следовательно, $f(x) \geq 0$ и на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Из формулы $f(2\pi - x) = f(-x) = -f(x)$ или $f(\pi + x) = f(\pi) * g(x) + f(x) * g(\pi) = -f(x)$ следует, что на сегменте $[\pi; 2\pi]$ функция $f(x) \leq 0$. Отметим, что $f(x) = 0$ только при $x = 0, \pi, 2\pi$.

Совершенно аналогично из условий, что $g(0) = 1, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, g(\pi) = -1, 0 < x * g(x) < f(x)$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), g(\pi - x) = -g(x), g(\pi + x) = -g(x)$ делаем вывод, что $g(x) \geq 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right], g(x) \leq 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, причём $g(x) = 0$ только в точках $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Для завершения рассуждений получим ещё несколько формул: $g(x + x) = g(x) * g(x) - f(x) * f(x) = g^2(x) - f^2(x)$. Используя тот факт, что $f^2(x) + g^2(x) = 1$ получим, что $g^2(x) = g(2x) + f^2(x) = \frac{1+g(2x)}{2}$, аналогично $f^2(x) = \frac{1-g(2x)}{2}$.

Приняв, что $x = \frac{x' + x''}{2}$ мы получим следующие формулы:

$$f^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - g(x') * g(x'') + f(x') * f(x'')}{2}$$

$$g^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + g(x') * g(x'') - f(x') * f(x'')}{2}$$

Тогда, зная знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ в любой точке сегмента $[0; 2\pi]$ и, соответственно, ввиду их периодичности, в любой точке бесконечной прямой, можно однозначно определить значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в любой точке вида $\left(\frac{p\pi}{2^n}\right)$, причём единственным образом (*любое целое число p единственным образом представимо в виде степеней двойки, что используется в двоичной системе счисления*). Следовательно, если функции $f(x)$ и $g(x)$ существуют, то они единственны.

Существование.

Теперь докажем существование данных функций, определённых для всех вещественных значений аргумента. Для этого необходимо определить значения $f(x)$ и $g(x)$ для $\forall x \in [0; 2\pi]$.

Стоит убедиться, что любая комбинация суммы аргументов приводит к одному и тому же результату.

В частности, $f((x' + x'') + x''') = f(x' + x'') * g(x''') + f(x''') * g(x' + x'')$
 $= f(x') * g(x'') * g(x''') + f(x'') * g(x') * g(x''') + f(x''') * g(x') * g(x'') +$
 $- f(x''') * f(x') * f(x'').$

Аналогично $f(x' + (x'' + x''')) = f(x') * g(x'' + x''') + f(x'' + x''') * g(x')$
 $= f(x') * g(x'') * g(x''') - f(x') * f(x'') * f(x''') + f(x'') * g(x''') * g(x') +$
 $+ f(x''') * g(x'') * g(x') = f((x' + x'') + x''').$

Следовательно, определяемые таким образом значения функций в точке будут иметь определённое значение.

Также отметим, что $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g(x); g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$ из условия.

Докажем монотонность функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Пускай $0 \leq x' < x'' \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда точки $\frac{x' + x''}{2}, \frac{x'' - x'}{2}$ заключены строго внутри данного сегмента. Поскольку $f(x), g(x) > 0$ на данном сегменте, то тогда $f(x'') - f(x') = 2g\left(\frac{x' + x''}{2}\right) * f\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(x'') > f(x')$, то есть

функция $f(x)$ возрастает на данном сегменте. Поскольку $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$, то функция $g(x)$ на соответствующем сегменте будет убывающей.

Ввиду того, что $f(x)$ и $g(x)$ монотонны и непрерывны на $[0; \frac{\pi}{2}]$, отсюда следует по критерию непрерывности монотонных функций, что $f(x)$ и $g(x)$ принимают все значения между $[f(0); f(\frac{\pi}{2})] = [0; 1]$ и соответственно $[g(\frac{\pi}{2}); g(0)] = [0; 1]$, причём эти функции определены для всех вещественных значений аргумента по следующей лемме:

Лемма. Пусть $y = f(x)$ монотонна на $[a; b] \Rightarrow \forall c \in [a; b) \exists f(c + 0)$, $\forall c \in (a; b] \exists f(c - 0)$. (см. предыдущие билеты).

Пределы слева в нуле и справа в $\frac{\pi}{2}$ следуют из чётности и нечётности функций, а также выше приведённых формул.

Следовательно, $f(x)$ и $g(x)$ однозначно определены на сегменте $[0; \frac{\pi}{2}]$, причём для $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. С помощью формул $f(\pi - x) = f(x)$, $f(2\pi - x) = -f(x)$, $g(\pi - x) = -g(x)$, $g(2\pi - x) = g(x)$ следует, что так же однозначно можно определить любую точку из сегмента $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, а затем и из сегмента $[\pi; 2\pi]$. Значит, функции $f(x)$ и $g(x)$ однозначно и единственным образом определены для всех вещественных значений аргумента из $[0; 2\pi]$, а ввиду их периодичности, и на всей числовой прямой. По построению они удовлетворяют всем выдвинутым условиям. Следовательно, такие функции $f(x)$ и $g(x)$ существуют. *Существование доказано.*

Утверждение доказано.

Функцию $f(x)$ обозначим как $\sin(x)$, а $g(x)$ как $\cos(x)$.

Продублируем их основные **свойства**, доказанные выше:

- 1) Определены и непрерывны при $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 2) $f(x) \in [-1; 1]$ (ограничены);
- 3) $\sin(x)$ – функция нечётная, $\cos(x)$ – чётная;
- 4) Периодические, $T = 2\pi$.
- 5) $\sin(x)$ возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi K; \frac{\pi}{2} + 2\pi K)$, $K \in Z$,
убывает при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi K; \frac{3\pi}{2} + 2\pi K)$ $K \in Z$;
 $\cos(x)$ возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi K; 2\pi K)$, $K \in Z$,
убывает при $x \in (2\pi K; \pi + 2\pi K)$ $K \in Z$;
- 6) Имеют бесконечное количество точек экстремума:
максимум: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$, для $\sin(x)$, $x = 2\pi K$ для $\cos(x)$, $K \in Z$.
минимум: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi K$, для $\sin(x)$, $x = \pi + 2\pi K$ для $\cos(x)$, $K \in Z$.

- 7) Имеют бесконечное количество нулей вида $x = \pi K$ для $\sin(x)$,
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi K$ для $\cos(x)$, $K \in \mathbb{Z}$.

Введём также функции $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Ввиду подобного представления $tg(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x)$, т. е. данная функция имеет период π , как и $ctg(x)$.

Из равенства $tg(x'') - tg(x') = \frac{\sin(x'')}{\cos(x'')} - \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \frac{\sin(x''-x')}{\cos(x'')\cos(x')} > 0$ при $x'' > x'$ следует, что $tg(x'') > tg(x') \Rightarrow tg(x)$ возрастает на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Отметим, что $tg(\pi - x) = -tg(x)$. Аналогично доказывается, что функция $y = ctg(x)$ – убывающая.

Итак, их основные **свойства**:

- 1) Определены и непрерывны на множествах
 $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + \pi K, K \in \mathbb{Z}\}$ для $y = tg(x)$;
 $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{x = \pi K, K \in \mathbb{Z}\}$ для $y = ctg(x)$;
- 2) $f(x) \in (-\infty; +\infty)$;
- 3) Функции нечётные;
- 4) Функции периодические с периодом π .
- 5) $tg(x)$ возрастает для $\forall x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi K; \frac{\pi}{2} + 2\pi K)$, $K \in \mathbb{Z}$;
 $ctg(x)$ убывает для $\forall x \in (2\pi K; \pi + 2\pi K)$, $K \in \mathbb{Z}$;
- 6) Имеют бесконечное количество точек разрыва 2-го рода.

Существуют также другие, реже используемые тригонометрические функции, такие как $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, но их свойства напрямую следуют из свойств вышеуказанных функций.

3. Обратные тригонометрические функции.

Введём обратные функции к тригонометрическим. Так как данные функции периодические, то для определённости будем вводить функции на интервалах.

$\sin(x)$ непрерывна, строго монотонна и принимает все свои значения на сегменте $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \exists! f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ – непрерывная и возрастающая, определённая при $y \in [-1; 1]$.

$\cos(x)$ непрерывна, строго монотонна и принимает все свои значения на сегменте $[0; \pi] \Rightarrow \exists! f^{-1}(y) = \arccos(y)$ – непрерывная и убывающая, определённая при $y \in [-1; 1]$.

$\operatorname{tg}(x)$ непрерывна, строго монотонна и принимает все свои значения на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \exists! f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}(y)$ – непрерывная и возрастающая, определённая при $y \in (-\infty; +\infty)$.

$\operatorname{ctg}(x)$ непрерывна, строго монотонна и принимает все свои значения на промежутке $(0; \pi) \Rightarrow \exists! f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg}(y)$ – непрерывная и убывающая, определённая при $y \in (-\infty; +\infty)$.

Записав функции в виде $y = \arcsin(x); y = \arccos(x); y = \operatorname{arctg}(x); y = \operatorname{arcctg}(x)$ можно записать их **свойства**.

- 1) $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$ определены и непрерывны при $x \in [-1; 1]$;
 $y = \operatorname{arctg}(x)$, $y = \operatorname{arcctg}(x)$ определены и непрерывны при $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 2) Множество значений $y = \arcsin(x)$ $E(x) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;
 Множество значений $y = \arccos(x)$ $E(x) = [0; \pi]$;
 Множество значений $y = \operatorname{arctg}(x)$ $E(x) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$;
 Множество значений $y = \operatorname{arcctg}(x)$ $E(x) = (0; \pi)$;
- 3) $y = \arcsin(x)$ и $y = \operatorname{arctg}(x)$ – нечётные функции.
- 4) $y = \arcsin(x)$ и $y = \operatorname{arctg}(x)$ возрастают на всей области определения,
 $y = \arccos(x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(x)$ убывают на всей области определения.

4). Гиперболические функции.

Введём гиперболические функции как $y = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; y = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
 $y = \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, y = \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Их свойства следуют из определения:

- 1) Определены и непрерывны при $\forall x \in (-\infty; +\infty)$, за исключением $y = \operatorname{cth}(x)$, неопределённого в т. $x = 0$.
- 2) Множество значений $y = \operatorname{sh}(x)$ $E(x) = (-\infty; +\infty)$,
 Множество значений $y = \operatorname{ch}(x)$ $E(x) = [1; +\infty)$;
 Множество значений $y = \operatorname{th}(x)$ $E(x) = (-1; 1)$;
 Множество значений $y = \operatorname{cth}(x)$ $E(x) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
- 3) $y = \operatorname{sh}(x)$, $y = \operatorname{th}(x)$, $y = \operatorname{cth}(x)$ – нечётные функции;
 $y = \operatorname{ch}(x)$ – чётная функция.
- 4) $y = \operatorname{sh}(x)$ и $y = \operatorname{th}(x)$ возрастают на всей области определения,
 $y = \operatorname{cth}(x)$ убывает на всей области определения;
 $y = \operatorname{ch}(x)$ убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$.

Билет 15

Замечательные пределы. Предельный переход в неравенствах.

Теорема о двух эвольвентах (для функций). Пусть $f(x), g(x), h(x)$ определены в окрестности т. a , и при $x \rightarrow a$ $f(x), h(x) \rightarrow b, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда $g(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$.

Пусть в некоторой проколотой δ -окрестности точки a заданы три функции $f(x), h(x), g(x)$, две из которых имеют общий предел, равный b . Тогда если всюду в указанной проколотой δ -окрестности точки a справедливы неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, то и функция $g(x)$ имеет в точке a предел, равный b .

Доказательство:

$$\forall x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n), h(x_n) \rightarrow b,$$

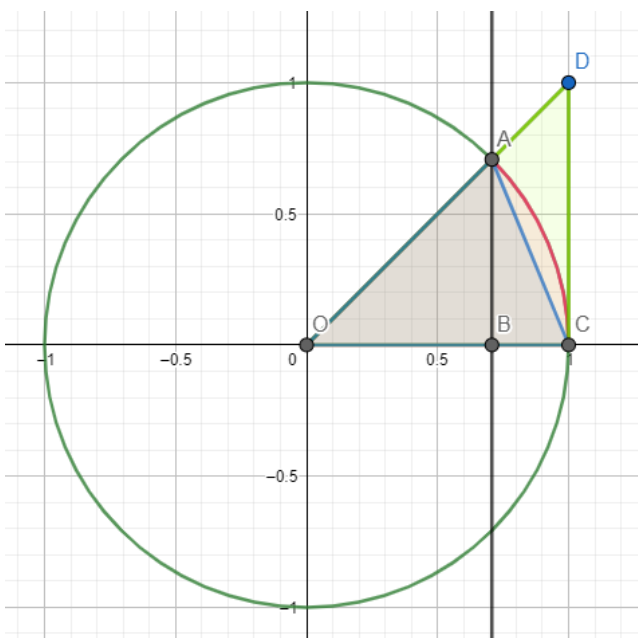
$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \Rightarrow \text{по т. о двух эвольвентах для последовательностей } g(x_n) \rightarrow b.$$

$$\forall x_n \rightarrow a \quad g(x_n) \rightarrow b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b. \text{ Теорема доказана.}$$

Теорема (первый замечательный предел). $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Доказательство:

Используя единичную окружность, установим следующие равенства.



Пусть точка A равна x (в радианах). Тогда $AB = \sin x, OB = \cos x$.

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} AB * OC = \frac{1}{2} \sin x * 1 = \frac{\sin x}{2};$$

$$S_{\text{сектор } OAC} = \pi * \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2};$$

$$S_{ODC} = \frac{1}{2} tg x * 1 = \frac{tg x}{2}.$$

Нетрудно заметить, что

$$S_{OAC} < S_{\text{сектора } OAC} < S_{ODC}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg x}{2}.$$

Значит, $\sin x < x < tg x$ (неравенство можно было использовать сразу при определении через функциональные уравнения);

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \mid * \frac{1}{\sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos(x) < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

При $x \rightarrow 0 \cos(x) \rightarrow 1 \Rightarrow$ по т. о двух эвольвентах $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Теорема доказана.

Теорема (второй замечательный предел). $\exists \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, где

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство:

Сначала докажем справедливость утверждения для предела справа.

$$\text{Рассмотрим } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n * \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} * \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \rightarrow e.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2): \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - e| \leq \varepsilon, |b_n - e| \leq \varepsilon$.

Пусть тогда $\frac{1}{x} > N(\varepsilon) \Rightarrow x \in (0; \delta(\varepsilon))$, где $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{N(\varepsilon)}$.

Более того, пусть $\left[\frac{1}{x}\right] = n \geq N$, при этом $n \leq \frac{1}{x} < n+1$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$$

Ввиду этого, справедливо, что $b_n \leq f(x) \leq a_n \Rightarrow b_n - e \leq f(x) - e \leq a_n - e$

При этом $|a_n - e| \leq \varepsilon, |b_n - e| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - e| < \max(|a_n - e|, |b_n - e|) \leq \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = e$.

Теперь докажем, что существует предел слева, равный e .

Выделим $\forall x_n \rightarrow 0 - 0 \Rightarrow$ пусть $y_n = -\frac{x_n}{1+x_n} \Rightarrow x_n = -\frac{y_n}{1+y_n}$. Тогда $y_n \rightarrow 0 + 0$.

$$\text{Кроме того, } f(x_n) = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 - \frac{y_n}{1+y_n}\right)^{-\frac{y_n}{1+y_n}} = \left(\frac{1}{1+y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}+1} =$$

$$= (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} * (1+y_n) \rightarrow e \text{ по уже доказанному равенству } \Rightarrow f(x_n) \rightarrow e$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e. \text{ Теорема доказана.}$$

Следствие. $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = e$, где $f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$.

Доказательство: Рассмотрим $t_n \rightarrow \infty, \forall n: |t_n| > 1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{t_n} \Rightarrow f(t_n) =$

$$= (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(t) = e. \text{ Следствие доказано.}$$

Теорема о предельном переходе в неравенствах для функций.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ и $\exists \delta: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta, f(x) > g(x) \Rightarrow A \geq B$.

Доказательство:

Пусть $h(x) = f(x) - g(x)$. По т. об арифметических операциях над пределами $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A - B = C$. По условию $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta, f(x) > g(x) \Rightarrow h(x) > 0$. Докажем, что $C \geq 0$. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta(\varepsilon): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) - C| < \varepsilon.$$

Предположим, что $C < 0$. Тогда число $\varepsilon = -\frac{C}{2} > 0 \Rightarrow |h(x) - C| < -\frac{C}{2}$, откуда следует, что $h(x) < \frac{C}{2} < 0 \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow C \geq 0$, что, в свою очередь, значит, что $A - B \geq 0 \Rightarrow A \geq B$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Билет 16

Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Теорема о прохождении непрерывной функции через нуль при смене знаков. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c: c \in [a; b]: f(c) = 0$.

Доказательство:

Для определённости пусть $f(a) < 0, f(b) > 0$.

Пусть $\{x\}$ — множество точек таких, что $f(x) < 0, x \in [a; b]$. Данное множество непусто, поскольку $(a; a + \delta) \in \{x\}$ (по локальным свойствам функции такая окрестность найдётся).

$\{x\}$ ограничено (в частности, т. b) $\Rightarrow \exists \sup\{x\} = c \in (a, b)$.

Покажем, что $f(c) = 0$.

$\forall x > c \Rightarrow f(x) \geq 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in \{x\} (f(x') < 0) \Rightarrow c - \varepsilon < x' < c$ (по определению супремума);
 $\exists x'' \in (c; c + \varepsilon): f(x'') \geq 0$.

Пусть $f(c) < 0$. Но тогда в правой ε — окрестности т. c $f(x) \geq 0$, т.к. $f(x'') \geq 0 \Rightarrow$ противоречие теореме об устойчивости знака непрерывной в точке функции. Пусть тогда $f(c) > 0 \Rightarrow f(x) < 0$ в левой ε -окрестности т. $c \Rightarrow$ снова противоречие $\Rightarrow f(c) = 0$, ч. т. д.

Теорема доказана.

Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и пусть $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$. Тогда $\forall \gamma: \alpha < \gamma < \beta$ ($\beta < \gamma < \alpha$) $\exists c: c \in [a; b]: f(c) = \gamma$.

Доказательство:

Если $\alpha = \beta$ или $\gamma = \alpha \Rightarrow c = a$. Если $\gamma = \beta \Rightarrow c = b$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. $g(x)$ непрерывна на $[a; b]$ как разность непрерывных функций. При этом $g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$, и в то же время $g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0 \Rightarrow$ по т. о прохождении через нуль $\exists c: c \in [a; b], g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \gamma = 0 \Rightarrow f(c) = \gamma$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f(x) \in C[a; b], \exists f^{-1}(y) \Rightarrow f(x)$ строго монотонна на $[a; b]$.

Доказательство:

$\exists f^{-1}(y) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. Пусть для определённости $f(a) < f(b)$.

Сначала покажем, что $\forall x \in (a; b) f(x) < f(b)$. Предположим обратное: пусть $\exists x': f(x') > f(b)$ ($f(x') \neq f(b)$ ввиду того, что $\exists f^{-1}(y)$). Применим теорему о прохождении через промежуточное значение для сегментов $[a; x']$ и $[x', b]$. Так как $f(a) < f(b) < f(x') \Rightarrow f(a) < \frac{f(x') + f(b)}{2} < f(x')$, а также $f(b) < \frac{f(x') + f(b)}{2} < f(x') \Rightarrow \exists c', c'': f(c') = f(c'') = \frac{f(x') + f(b)}{2}, c' \neq c'' \Rightarrow$ противоречие ($\nexists f^{-1}(y)$) $\Rightarrow f(x') < f(b) \Rightarrow \forall x \in (a; b) f(x) < f(b)$.

Установим теперь строго монотонное возрастание. Пусть $\exists x' < x''$, но при этом $f(x') > f(x'')$, $x', x'' \in [a, b]$. Опять же, так как $f(x'') < f(x') < f(b)$, то тогда $f(x'') < \frac{f(x') + f(x'')}{2} < f(x')$, $f(x'') < \frac{f(x') + f(x'')}{2} < f(b)$. Опять же, применяя ещё раз указанную теорему для сегментов $[x'; x'']$ и $[x''; b]$ получим, что $\exists c', c'': f(c') = f(c'') = \frac{f(x') + f(x'')}{2}, c' \neq c'' \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow f(x'') > f(x') \Rightarrow f(x)$ – строго возрастающая.

Следствие доказано.

Билет 17

Ограниченность функции, непрерывной на сегменте (первая теорема Вейерштрасса)

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Если $f(x) \in C[a; b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a; b]$.

Доказательство:

Предположим, что $f(x)$ не ограничена $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| \geq n$.

$\{x_n\} \in [a; b] \Rightarrow \{x_n\}$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow$ по т.

Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{k_n}: x_{k_n} \rightarrow c \in [a; b] \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow f(c)$. Но в то же время $|f(x_n)| \rightarrow \infty$, при этом $f(x)$ непрерывна $\Rightarrow |f(x_n)| \rightarrow f(c) \Rightarrow f(c) = \infty \Rightarrow$ противоречие т. Больцано-Вейерштрасса $\Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a; b]$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, теорема неприменима на бесконечном множестве, так как оно не является сегментом. Например, $f(x) = x, x \in (-\infty; +\infty)$. $x_n = n, n \in \mathbb{N}, f(x_n) = n \rightarrow \infty \Rightarrow$ хоть функция и непрерывна на данном сегменте, но не является ограниченной, а первая теорема Вейерштрасса неприменима ввиду того, что множество – не сегмент.

Замечание 2. Более того, теорема справедлива только для сегмента. Для интервала или полусегмента она уже несправедлива. Покажем это.

Например, рассмотрим функцию $y = f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0; 1)$ или полусегменте $(0; 1]$. Функция $f(x)$ непрерывна на указанном множестве, но не ограничена: $x_n = \frac{1}{n} \in (0; 1)$ или $x_n = \frac{1}{n} \in (0; 1]$, где $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow \{f(x_n)\} = \{n\} \rightarrow \infty$, т. е. функция не ограничена.

Билет 18

О достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса)

Приведём несколько определений

$$M = \sup_{\{x\}} f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) > M - \varepsilon. \end{cases}$$

$$m = \inf_{\{x\}} f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Отметим справедливость следующих двух утверждений.

Утверждение. Если $f(x)$ ограничена на $\{x\}$ сверху (снизу) $\Rightarrow \exists \sup_{\{x\}} f(x) \left(\inf_{\{x\}} f(x) \right)$.

Утверждение. Если $f(x)$ ограничена на $\{x\} \Rightarrow \exists \sup_{\{x\}} f(x)$ и $\inf_{\{x\}} f(x)$

Данные утверждения являются следствием теоремы о существовании $\sup\{x\}$ ($\inf\{x\}$) у ограниченного сверху (снизу) множества, так как $\{f(x)\}$ является ограниченным.

Возникает вопрос о достижимости точных верхней и нижней граней. В общем случае они оказываются недостижимыми. В качестве примера можно привести следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = 0, x = 1 \end{cases}$$

На сегменте $[0; 1]$ она имеет $\sup_{\{x\}} f(x) = 1$, $\inf_{\{x\}} f(x) = 0$, однако она их не достигает, поскольку значения функции в точках 0 и 1 равны $\frac{1}{2}$. Тогда возникает следующая теорема:

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). Если $f(x) \in C[a; b] \Rightarrow \exists x_1, x_2: f(x_1) = \sup_{x \in [a; b]} f(x), f(x_2) = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$.

Доказательство:

По первой теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена на $[a; b] \Rightarrow$

$$\exists \sup_{x \in [a; b]} f(x) = M \text{ и } \inf_{x \in [a; b]} f(x) = m.$$

Пусть M не является достижимой $\Rightarrow \forall x \in [a; b] f(x) < M \Rightarrow M - f(x) > 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0 \forall x \in [a; b]$. Т. к. $M - f(x)$ – непрерывная функция, то и $F(x)$ тоже будет непрерывной $\Rightarrow F(x)$ ограничена на $[a; b]$ по первой т.

Вейерштрасса $\Rightarrow \exists \sup_{x \in [a; b]} F(x) = A \Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} \leq A \forall x \in [a; b]$.

Тогда можно записать, что $M - f(x) \geq \frac{1}{A} \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{A} = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$. Но число $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow M$ достижимо $\Rightarrow \exists x_1: f(x_1) = M$.

Аналогично предположим, что m недостижимо и рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} > 0$ на $[a; b] \Rightarrow \frac{1}{f(x)-m} \leq B \Rightarrow f(x) - m \geq \frac{1}{B} \Rightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{B} \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow m$ достижимо.

Теорема доказана.

Можно также доказать эту теорему несколько иначе.

Доказательство (снова):

Запишем определение супремума.

$$M = \sup_{\{x\}} f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \{X\} \Rightarrow f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{X\}: f(x) > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Из второго условия $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M + \varepsilon$.

$$\text{Пусть } \varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n \in [a; b]: M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M + \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - M| \leq \frac{1}{n}.$$

Но последовательность $\frac{1}{n}$ — б. м. $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow M$. Аналогично доказывается случай точной нижней грани. **Теорема доказана.**

Следствие. $\forall \gamma: m \leq \gamma \leq M \exists c \in [a; b]: f(c) = \gamma$. Это прямое следствие т. о прохождении через промежуточное значение и 2-ой т. Вейерштрасса: $m, M \in$ сегменту с концами $f(a)$ и $f(b) \Rightarrow$ пусть $f(a) \geq f(b) \Rightarrow f(b) \leq m \leq \gamma \leq M \leq f(a) \Rightarrow \exists c \in [a; b]: f(c) = \gamma$. **Следствие доказано.**

Замечание 1. Обратная теорема несправедлива, т. к. существуют функции, достигающие своих максимальных и минимальных значений, но при этом не являющиеся непрерывными, например, функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x - \text{иррациональное} \\ 1, \text{ если } x - \text{рациональное.} \end{cases}$$

Она разрывна в любой точке сегмента $[0; 1]$, но достигает своего максимального и минимального значений, равных 1 и 0 соответственно.

Замечание 2. Теорема справедлива только для сегмента. Во-первых, функция может быть вовсе неограниченна на интервале или полусегменте (т. к. неприменима первая теорема Вейерштрасса). Во-вторых, может быть недостижимой одна из граней: например, для $f(x) = x$ на $(0; 1)$ или $[0; 1)$ точная верхняя грань $M = 1$ недостижима.

Билет 19

Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора

Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $\{x\}$, если
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \{x\}: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Из равномерной непрерывности напрямую следует непрерывность $f(x)$ на $\{x\}$. Действительно, пусть $x'' = x_0 \in \{x\}$, а $x' = \forall x_1 \in \{x\} \Rightarrow$ вытекает непрерывность в x_0 по Коши:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_1 \in \{x\}: |x_0 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Замечание 2. Из непрерывности на множестве не следует равномерная непрерывность. В случае равномерной непрерывности $\delta = \delta(\varepsilon)$ и выбирается для всего множества, а в случае непрерывности $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ и выбирается для каждой точки отдельно. Например, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ непрерывна при $x \in (0; 1]$, но равномерно непрерывной не является.

Замечание 3. Из определения вытекает, что из равномерной непрерывности $f(x)$ на $\{x\}$ следует равномерная непрерывность $f(x)$ на любом подмножестве $\{x\}$ (δ подбирается для всего множества).

Примеры:

Функция $f(x) = x$ является равномерно непрерывной при $x \in (-\infty; +\infty)$. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon: \forall x', x'' \in \{x\}: |x' - x''| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

В то же время $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Функция **не является равномерно непрерывной** на множестве $\{x\}$, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x', x'' \in \{x\}: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Действительно, $|f(x') - f(x'')| = |(x')^2 - (x'')^2| = |(x') + (x'')| * |(x') - (x'')|$.
Выберем $x' > \frac{2\varepsilon}{\delta}$, $x'' = x' + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$. При этом выходит, что
 $|f(x') - f(x'')| = |(x') + (x'')| * |(x') - (x'')| \geq \frac{2\varepsilon}{\delta} * \frac{\delta}{2} = \varepsilon$. Значит, $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $x \in (-\infty; +\infty)$.

Докажем также, что $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не является равномерно непрерывной при $x \in (0; 1]$. Рассмотрим $x'_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Обе последовательности бесконечно малые $\Rightarrow x'_n - x''_n \rightarrow 0$ тоже б. м. $\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists N: \forall n \geq N |x'_n - x''_n| < \delta$. Для этого же номера $N |f(x'_n) - f(x''_n)| = |\sin(\pi n) - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)| = 1$. Тогда

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \forall \delta > 0: \exists x', x'' \in \{x\}: x' = \frac{1}{\pi K} \text{ и } x'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi K}, K \in \mathbb{Z}, |x' - x''| < \delta \Rightarrow$
 $|f(x') - f(x'')| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не является равномерно
 непрерывной на $(0; 1]$.

Стоит отметить, что уже на множестве $(\gamma; 1]$, где $0 < \gamma < 1$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ уже будет равномерно непрерывной. Для доказательства этого утверждения удобно доказать следующую теорему.

Теорема Кантора. $f(x) \in C[a; b] \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной на указанном множестве. Тогда $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x', x'' \in [a; b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Выберем $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\exists x'_n, x''_n \in [a; b]: |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

Последовательность $\{x'_n\}$ ограничена, т. к. $\{x_n\} \in [a; b] \Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{k_n} \rightarrow c \Rightarrow c \in [a; b] \Rightarrow$ т. к. $x'_n - x''_n \rightarrow 0$, то $x''_{k_n} \rightarrow c$.

Тогда $f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c), f(x''_{k_n}) \rightarrow f(c) \Rightarrow |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \rightarrow 0 \Rightarrow$
 противоречие $\Rightarrow f(x)$ — равномерно непрерывна на $[a; b]$.

Теорема доказана.

Теорема. $f(x) \in C(a; b), \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = g, \exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = d \Rightarrow$
 $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $(a; b)$. Тогда

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \frac{1}{n} > 0: \exists x'_n, x''_n \in (a; b): |x'_n - x''_n| < \delta \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

Отметим, что $|x'_n - x''_n| \rightarrow 0$. Возможно несколько случаев.

- 1) $\exists x'_{k_n} \rightarrow c \in (a; b) \Rightarrow x''_{k_n} \rightarrow c$;
- 2) $\exists x'_{k_n} \rightarrow a + 0$ (или $-\infty$) $\Rightarrow x''_{k_n} \rightarrow a + 0$ (или $-\infty$).
- 3) $\exists x'_{k_n} \rightarrow b - 0$ (или $+\infty$) $\Rightarrow x''_{k_n} \rightarrow b - 0$ (или $+\infty$).

Тогда получается:

- 1) $f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c), f(x''_{k_n}) \rightarrow f(c)$.
- 2) $f(x'_{k_n}) \rightarrow g, f(x''_{k_n}) \rightarrow g. \Rightarrow |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \rightarrow 0$.
- 3) $f(x'_{k_n}) = d, f(x''_{k_n}) \rightarrow d$.

Получаем противоречие $\Rightarrow f(x)$ — равномерно непрерывная.

Теорема доказана.

Теперь докажем, что $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ равномерно непрерывна на $(\gamma; 1], 0 < \gamma < 1$. По вышедоказанной теореме, так как $\exists \lim_{x \rightarrow \gamma+0} f(x) = \sin\left(\frac{1}{\gamma}\right), \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sin(1)$, при этом $f(x) \in C(\gamma; b) \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $(\gamma; 1]$.

Введём также несколько понятий.

Замкнутым будем называть множество, содержащее любую свою предельную точку.

Компактным множеством (или **компактом**) будем называть ограниченное замкнутое множество.

Модулем непрерывности будем называть $\sup\{|f(x') - f(x'')|\} = \omega(f, \delta)$. Для каждого δ найдётся своё ω . Иногда его обозначают следующим образом: $\sup\{|f(x') - f(x'')|: |x' - x''| \leq \delta; x', x'' \in \{x\}\}$

Теорема (критерий равномерной непрерывности). Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\{x\} \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega(f, \delta) = 0$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на $\{x\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \{x\}: |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но это означает, что $\forall \delta \in (0; \delta_\varepsilon)$ справедливо следующее (ещё меньшему значению приращения аргумента соответствует не большее приращение функции):

$$\sup\{|f(x') - f(x'')|: |x' - x''| < \delta; x', x'' \in \{x\}\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega(f, \delta) = 0$$

Достаточность. Пусть $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega(f, \delta) = 0$. По критерию Коши это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon(\varepsilon): \forall \delta: 0 < \delta < \delta_\varepsilon \Rightarrow \omega(f, \delta) < \varepsilon$. В свою очередь это значит, что $\sup\{|f(x') - f(x'')|: |x' - x''| \leq \delta; x', x'' \in \{x\}\} < \varepsilon$, или же $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in \{x\}: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\{x\}$.

Теорема доказана.

Билет 20

Понятие производной и дифференцируемости функции в точке

Приращение аргумента – произвольное число Δx такое, что для $\forall$ фиксированного $x \in (a, b) \Rightarrow (x + \Delta x) \in (a, b)$.

Приращение функции $f(x)$ в т. x , отвечающим приращению аргумента Δx , называется число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Справедливо следующее **утверждение**: $y = f(x)$ – непрерывна в т. $x \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Действительно, если $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, то функция по определению непрерывна. Это значит, что $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ будет бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда можно получить *разностную форму условия непрерывности* $y = f(x)$ в точке x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Разностным отношением будем называть отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Можно рассматривать это отношение как функцию от Δx , определённую в некоторой проколотой δ – окрестности 0.

Производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x называется предел разностного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ (если такой предел существует):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правой $f'(x+0)$ (левой $f'(x-0)$) производной $y = f(x)$ в фиксированной точке x называется правый (левый) предел разностного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ (если такой предел существует):

$$\begin{aligned} f'(x+0) \\ (f'(x-0)) \end{aligned} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+0 \\ (\Delta x \rightarrow 0-0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0+0 \\ (\Delta x \rightarrow 0-0)}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

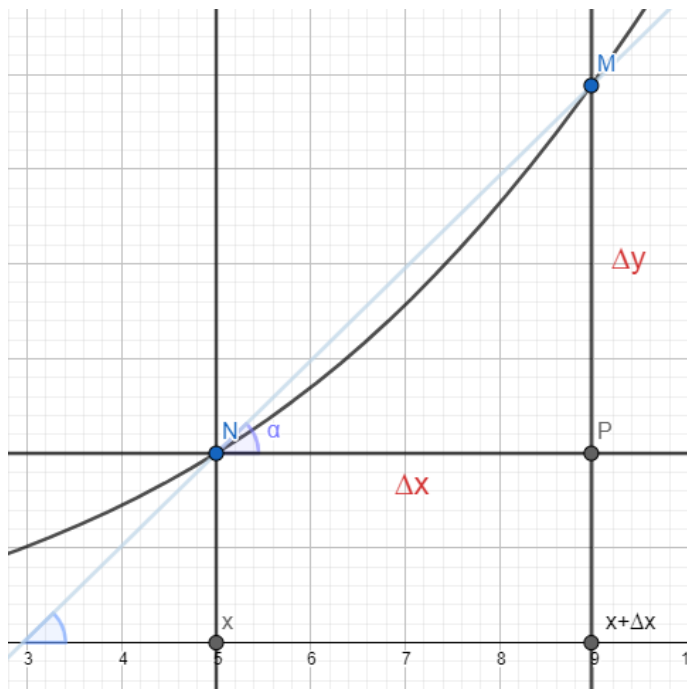
Утверждение. Если функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то эта функция имеет в точке x как правую, так и левую производную, причём $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$.

Утверждение. Если функция $f(x)$ имеет в точке x как правую, так и левую производную, причём $f'(x+0) = f'(x-0)$, то она имеет в точке x производную $f'(x)$, причём $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$.

Эти утверждения вытекают из того факта, что производная – это предел разностного отношения, и из условия наличия предела функции в точке x .

Если $f'(x+0) \neq f'(x-0)$, то $\nexists f'(x)$: например, для $f(x) = |x|$ $\nexists f'(0)$, так как $f'(x+0) = 1 \neq f'(x-0) = -1$.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, определённой и непрерывной на интервале (a, b) . Фиксируем произвольную точку x и рассмотрим две точки: $N(x, f(x))$ и $M(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.



Секунцей назовём прямую MP . Угол, образованный этой прямой с положительной полуосью Ox обозначим как $\alpha(\Delta x)$.

Если существует предельное положение секущей MP при $\Delta x \rightarrow 0$, то это предельное положение называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке M графика.

Утверждение. Если функция $y = f(x)$ имеет в данной фиксированной точке производную, то $\exists$ касательная к графику в этой

точке, причём $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x)$.

Доказательство:

Проведём перпендикуляры из точек N и M на ось абсцисс, а точку пересечения обозначим как P . Из $\triangle MNP$ видно, что $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Отсюда $\alpha(\Delta x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Поскольку $\exists f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то ввиду непрерывности $\operatorname{arctg}(x) \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \operatorname{arctg}(f'(x)) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x)$, а это означает существование предельного положения секущей, то есть касательной с углом наклона $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(f'(x)) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha_0) = f'(x)$.

Утверждение доказано.

В этом утверждении состоит *геометрический смысл производной*.

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке x** , если приращение Δy этой функции в т. x , соответствующее Δx , может быть представлено в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$, где A — число, не зависящее от Δx , но зависящее от точки x , а $\alpha(\Delta x)$ — функция Δx , бесконечно малая при $\Delta x = 0$.

Замечание. Второе слагаемое $\alpha(\Delta x) * \Delta x$ можно записать в виде $o(\Delta x)$, поскольку Δx и $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малые величины. Тогда равенство примет вид $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$.

Теорема. $f(x)$ дифференцируема в т. $a \Leftrightarrow \exists f'(a), f'(a)$ – конечная.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $f(x)$ дифференцируема в т. $a \Rightarrow \Delta y = A * \Delta x + o(\Delta x)$.

Пусть $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A * \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) = A$.

Следовательно, $\Delta y = f'(a) * \Delta x + o(\Delta x)$.

Достаточность. Пусть в т. a существует конечная производная, то есть $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \Rightarrow$ пусть $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Умножив это соотношение на $\Delta x \neq 0$, получим $\Delta x * \alpha(\Delta x) = \Delta y - f'(a) * \Delta x \Rightarrow \Delta y = f'(a) * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x = A\Delta x + o(\Delta x)$. Как видно, представления совпадают.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема справедлива лишь для функции одной переменной!

Теорема. $f(x)$ дифференцируема в т. $a \Rightarrow f(x)$ непрерывна в т. a .

Доказательство:

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow$ при $\Delta x \rightarrow 0$ $A\Delta x \rightarrow 0, o(\Delta x) \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$. По разностному условию непрерывности $f(x)$ непрерывна.

Теорема доказана.

Замечание. Обратное следствие в общем случае не является справедливым. В качестве примера можно вновь привести $y = f(x) = |x|$ в т. $x = 0$.

Билет 21

Правила дифференцирования суммы, произведения и частного, сложной и обратной функции. Формулы дифференцирования простейших элементарных функций.

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в данной точке x , то сумма, разность, произведение и частное (при $g(x) \neq 0$) этих функций также дифференцируемы в этой точке, причём имеют место формулы:

$$\begin{cases} [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \\ [f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x) \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2(x)} \end{cases}.$$

Доказательство:

1. Пусть $h(x) = f(x) \pm g(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta x} &= \frac{\left((f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\left((f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) \right)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

(при $\Delta x \rightarrow 0$ пределы существуют по условиям теоремы).

2. Пусть теперь $h(x) = f(x) * g(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta x} &= \frac{\left((f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x)) - (f(x) * g(x)) \right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\left((f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x)) - f(x) * g(x + \Delta x) + f(x) * g(x + \Delta x) - (f(x) * g(x)) \right)}{\Delta x} \\ &= \frac{\left(\left((f(x + \Delta x) - f(x)) * g(x + \Delta x) \right) + f(x) * (g(x + \Delta x) - g(x)) \right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta x} * g(x + \Delta x) + f(x) * \frac{\Delta g}{\Delta x}; \end{aligned}$$

$$\text{При } \Delta x \rightarrow 0 \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x), \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x) \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta x} = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x).$$

3. Пусть теперь $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\left(\left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} \right) - \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right)}{\Delta x} = \frac{\left((f(x + \Delta x) * g(x)) - (f(x) * g(x + \Delta x)) \right)}{\Delta x * g(x + \Delta x) * g(x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left((f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x)) - (f(x) * g(x + \Delta x) - f(x) * g(x)) \right)}{\Delta x * g(x + \Delta x) * g(x)} = \\
&= \frac{\left((f(x + \Delta x) - f(x)) * g(x) - (g(x + \Delta x) - g(x)) * f(x) \right)}{\Delta x * g(x + \Delta x) * g(x)} \\
&= \frac{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} * g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} * f(x) \right)}{g(x + \Delta x) * g(x)}; \\
&\text{При } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x), \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x), g(x + \Delta x) \rightarrow g(x); \\
&\frac{\Delta h}{\Delta x} \rightarrow \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $x = g(t)$ определена в окрестности точки t' и дифференцируема в указанной точке, $x' = g'(t')$, а функция $y = f(x)$ определена в окрестности x' и дифференцируема в $x' \Rightarrow f(g(t)) = h(t)$ дифференцируема в t' , причём $h'(t') = f'(x') * g'(t')$.

Доказательство:

Придадим аргументу t' функции $x = g(t)$ произвольное приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда $\frac{g(t' + \Delta t) - g(t')}{(=x(t')) \quad (=x')} = \Delta x = g'(t') * \Delta t + \alpha * \Delta t \Rightarrow$ при $\Delta t \rightarrow 0 \quad g'(t') \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $g'(t') * \Delta t \rightarrow \Delta x, \alpha * \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow x(t') - x' = \Delta x(t') \Rightarrow x(t') = x' + \Delta x(t')$.

$$\Delta h = h(t' + \Delta t) - h(t') = f(g(t' + \Delta t)) - f(g(t')) = f(x(t')) - f(x')$$

В то же время $\Delta h = f'(x') * \Delta x + \beta * \Delta x$.

При $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \beta * \Delta x \rightarrow 0$ (ввиду непрерывности).

$\Delta h = f'(x') * (g'(t') * \Delta t + \alpha \Delta t) + \beta * (g'(t') * \Delta t + \alpha \Delta t)$. Тогда справедливо $\frac{\Delta h}{\Delta t} = f'(x') * g'(t') + f'(x') * \alpha + \beta * g'(t') + \beta \alpha$. Нетрудно заметить, что ввиду $\Delta t \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, то есть $\frac{\Delta h}{\Delta t} = h'(t') \rightarrow f'(x') * g'(t')$. Данный предел существует, поскольку существуют предел в правой части.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема переносится и на сложную функцию, являющуюся суперпозицией трёх и более функций.

Теорема о производной обратной функции. Пусть $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности m . x , а также дифференцируема в x , причём $f'(x) \neq 0$. Тогда в окрестности m . $y = f(x)$

$\exists f^{-1}(y)$ соответствующего характера монотонности, дифференцируемая в т. y , причём $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$;

Доказательство:

Так как $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности т. x , то тогда $\exists f^{-1}(y)$, определённая, непрерывная и имеющая тот же характер монотонности, что и $y = f(x)$. Ввиду строгой монотонности функций $\Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0$. Приращению Δy соответствует $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. Так как $x = f^{-1}(y)$, то $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) \Rightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x), \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Перепишем равенство $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$. По условию $f(x)$

дифференцируема, то есть $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, причём $f'(x) \neq 0$. При $\Delta x \rightarrow 0$ по разностному условию непрерывности $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Теорема доказана.

Формулы дифференцирования простейших элементарных функций.

1. $f(x) = \sin(x)$.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) * \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) * \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) * \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$. Следовательно,

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + 0) * 1 = \cos(x)$ (в силу непрерывности $f(x) = \cos(x)$ и первого замечательного предела). $(\sin(x))' = \cos(x)$.

2. $f(x) = \cos(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) * \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} * \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin(x).$$

Существует и другой способ нахождения производной.

$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) * -1 = -\sin x.$$

3. $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

По правилу дифференцирования частного:

$$(tg(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2(x).$$

4. $f(x) = ctg(x)$.

По правилу дифференцирования частного:

$$(ctg(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + ctg^2(x)).$$

5. $f(x) = \log_a x$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\log_a(x + \Delta x) - \log_a x)}{\Delta x} = \frac{(\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}))}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})) = \\ &= \frac{x}{\Delta x} * \left(\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) \right) * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} * \left(\log_a \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) \right). \end{aligned}$$

По второму замечательному пределу

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} * (\log_a(e)) = \frac{1}{x} * \left(\frac{\log_e(e)}{\log_e a} \right) = \frac{1}{x * \ln(a)}$$

В частности, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

6. $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

$f(x)$ – функция, обратная к $x = \log_a y$. В силу правила дифференцирования обратной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{(\log_a(e))'} = \frac{1}{\frac{1}{y * \ln(a)}} = y * \ln(a) = a^x * \ln(a).$$

В частности, $(e^x)' = e^x$

7. $f(x) = x^\alpha$.

$x^\alpha = (e^{\alpha * \ln(x)})$, и по правилам дифференцирования сложной функции:

$$(e^{\alpha * \ln(x)})' = (e^{\alpha * \ln(x)}) * \alpha * (\ln(x))' = x^\alpha * \alpha * \frac{1}{x} = \alpha * x^{\alpha-1}.$$

Можно доказать справедливость формулы и через индукцию.

8. $y = \arcsin(x), x \in [-1; 1]$.

Обратная функция к ней $x = \sin y$.

В силу правила дифференцирования обратной функции:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

9. $y = \arccos(x), x \in [-1; 1].$

Обратная функция к ней $x = \cos(y).$

В силу правила дифференцирования обратной функции:

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{(\cos(y))'} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10. $y = \operatorname{arctg}(x), x \in R.$

Обратная функция к ней $x = \operatorname{tg}(y).$

В силу правила дифференцирования обратной функции:

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{(\operatorname{tg}(y))'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

11. $y = \operatorname{arcctg}(x), x \in R.$

Обратная функция к ней $x = \operatorname{ctg}(y).$

В силу правила дифференцирования обратной функции:

$$(\operatorname{arcctg}(x))' = \frac{1}{(\operatorname{ctg}(y))'} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

12. $y = \operatorname{sh}(x).$

По правилам дифференцирования разности и сложной функции:

$$(\operatorname{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{ch}(x).$$

13. $y = \operatorname{ch}(x).$

По правилам дифференцирования разности и сложной функции:

$$(\operatorname{ch}(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{sh}(x).$$

14. $y = \operatorname{th}(x).$

По правилам дифференцирования частного:

$$(\operatorname{th}(x))' = \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)' = \frac{(\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

15. $y = \operatorname{cth}(x)$.

По правилам дифференцирования частного:

$$(\operatorname{cth}(x))' = \left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right)' = \frac{(\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}^2(x))}{\operatorname{sh}^2(x)} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

16. Отдельно отметим функцию $y = f(x)^{g(x)}$. Её следует дифференцировать несколько по-особому.

$$\begin{aligned} (f(x)^{g(x)})' &= (e^{g(x) \cdot \ln(f(x))})' = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} * \left(g'(x) * \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} * f'(x) \right) = \\ &= f(x)^{g(x)-1} * (f(x) * \ln(f(x)) * g'(x) + g(x) * f'(x)). \end{aligned}$$

В частности, $(x^x)' = x^{x-1} * (x * \ln x + x) = x^x * (\ln(x) + 1)$.

Билет 22

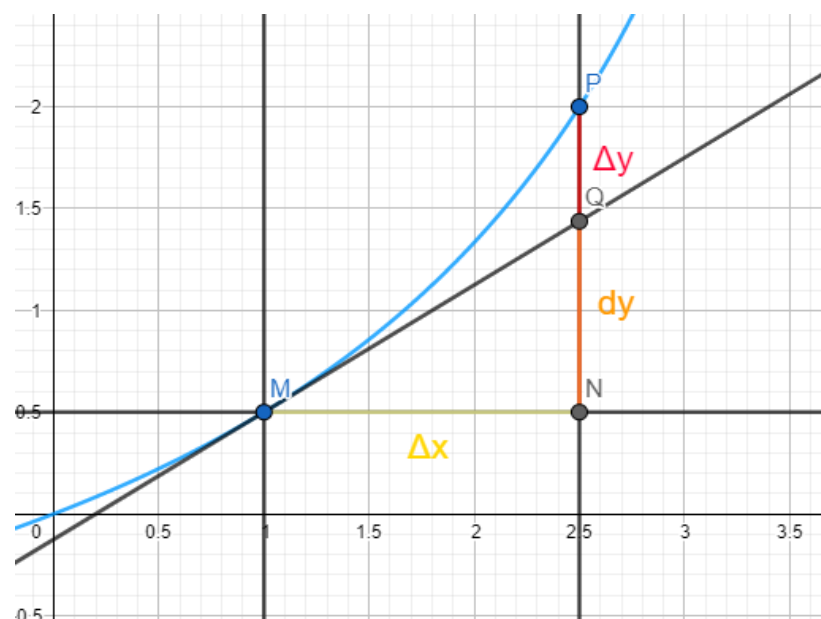
Первый дифференциал функции. Инвариантность его формы. Использование дифференциала для приближенного вычисления приращения функции.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называют главную часть приращения Δy функции, являющуюся линейной однородной функцией Δx .

Дифференциал обозначается как dy .

$$dy = f'(x)\Delta x$$

В общем случае $dy \neq \Delta y$, даже если они отвечают одному приращению Δx .
Докажем это утверждение.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть M и P — точки этого графика, причём M отвечает аргументу x , а P — $x + \Delta x$. Проведём касательную MQ к графику в т. M , а также $MN \parallel Ox$, $PN \perp Ox$, $PN \cap MQ = Q$. Тогда $PN = \Delta y$, $\frac{QN}{MN} = \operatorname{tg}(PMN) = f'(x)$.

Следовательно, $QN = f'(x) * MN$, но $MN = \Delta x \Rightarrow QN = f'(x) * \Delta x = dy$. Поскольку точки Q и P различны отсюда вытекает, что

$$QN \neq PN \Rightarrow dy \neq \Delta y.$$

Введём понятие **дифференциала**

аргумента. Существует договорённость, что $dx = \Delta x$, если x — независимая переменная (тогда x рассматривают как функцию $f(x) = x$, из чего следует, что $dx = \Delta x * 1 = \Delta x$).

Тогда равенство принимает вид $dy = f'(x)dx$, если x — независимая переменная.

Покажем, что данное представление справедливо и для $x = g(t)$. Данное свойство называется **инвариантностью формы первого дифференциала**.

$$f(x) = f(g(t)) \Rightarrow f'(g(t)) = f'(x) * g'(t).$$

При этом $dy = f'(g(t))dt$, $dx = g'(t)dt$.

Тогда $dy = f'(x) * g'(t)dt = f'(x)dx$. **Инвариантность доказана.**

Замечание. Ввиду инвариантности формы первого дифференциала, можно записать равенство и в другом виде $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Отметим следующие равенства:

$$\begin{aligned}d(f \pm g) &= d(f) \pm d(g); \\d(fg) &= g * d(f) + f * d(g) \\d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g * d(f) - f * d(g)}{g^2} \\d(c * f) &= c * d(f), \text{ где } c = const.\end{aligned}$$

Пусть для простоты x — независимая переменная. Как уже упоминалось, $dy \neq \Delta y$ в общем случае. Однако $\Delta y \approx dy$ с точностью до $o(\Delta x)$. Отношение $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ называют **относительной погрешностью** данного равенства. При $\Delta x \rightarrow 0, \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0$.

Данное приближённое равенство позволяет заменять приращение Δy дифференциалом (dy -линейная функция Δx , а Δy может быть более сложной функцией Δx).

Ввиду равенств $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), dy = f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Данное приближённое равенство позволяет заменить $f(x)$ линейной функцией от Δx в малой окрестности точки x .

В частности, используя приближённое равенство можно легко получить приближённые равенства для эквивалентные функции (вблизи 0)

$$f(x) = \sin(x) \approx \sin(0) + \cos(0) \Delta x = 1 * (x - 0) = x$$

$$f(x) = \ln(1 + x) \approx \ln(1 + 0) + \frac{(x - 0)}{(1 + x) * \ln(e)} = x$$

$$f(x) = tg(x) \approx tg(0) + \left(\frac{1}{\cos^2(0)}\right) * (x - 0) = x$$

$$f(x) = e^x \approx e^0 + e^0 * (x - 0) = 1 + x$$

$$f(x) = (1 + x)^\alpha \approx (1 + 0)^\alpha + \alpha(1 + 0)^{\alpha-1} * (x - 0) = 1 + \alpha x.$$

Билет 23

Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если функция $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке интервала $(a; b)$, т. е. имеет в ней производную. Указанную производную называют **второй производной** (или **производной второго порядка**) функции $y = f(x)$. Обозначают её как $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$.

Аналогично вводим понятие 3 – ей, 4-ой и последующих производных.

Предполагая, что введено понятие $n - 1$ производной и она имеет производную в некоторой точке интервала $(a; b)$, введём понятие **n -ой производной** $f(x)$.

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Функцию, имеющую $n -$ ую производную, называют **n раз дифференцируемой**.

Таким образом, понятие $n -$ ой производной вводится индуктивно.

Некоторые кратные производные:

Доказать указанные равенства можно с помощью метода мат. индукции.

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) * x^{\alpha-n}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x * \ln^n a$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin(x))^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} * n\right);$$

$$(\cos(x))^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} * n\right)$$

$$(\arctg(x))^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} * \sin\left[n\left(\arctg(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ (страшная формула, я её доказывать не хочу)}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = \frac{(ad-bc)(-c)^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}} \text{ (и её тоже, она бяка)}$$

Предположим, что $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x , а аргумент либо является независимой переменной, либо представляет дважды дифференцируемую функцию переменной t . Тогда:

$$\delta(dy) = \delta(f'(x)dx)$$

Вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называют значение $\delta(dy)$ от первого дифференциала при $\delta x = dx$. Его обозначают как d^2y .

Понятие n -го дифференциала вводят индуктивно. Предполагая, что введено понятие $n - 1$ дифференциала и что функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в т. x , а аргумент либо является независимой переменной, либо представляет собой n раз дифференцируемую функцию независимой переменной t , введём понятие n -го дифференциала.

n -ым дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называют значение $\delta(d^{n-1}y)$ от $n-1$ дифференциала при $\delta x = dx$. Его обозначают как $d^n y$.

Пусть x — независимая переменная. Отметим, что $\delta(dx) = 0$. Тогда второй дифференциал:

$$d^2 y = \delta(dy) = \{\delta[f'(x)dx]\} = \{\delta[f'(x)]dx + f'(x)\delta(dx)\} = \{\delta[f'(x)]dx\} = \{f^{(2)}(x)\delta x dx\} = f^{(2)}(x)(dx)^2 \Rightarrow d^2 y = f^{(2)}(x)(dx)^2.$$

По индукции нетрудно убедиться, что $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$, если x — независимая переменная.

Если же x представляет собой некоторую функцию от независимой переменной t , то мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} d^2 y = \delta(dy) &= \{\delta[f'(x)dx]\} = \{\delta[f'(x)]dx + f'(x)\delta(dx)\} \\ &= \{f^{(2)}(x)\delta x dx\} + \{f'(x)\delta(dx)\} = f^{(2)}(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x; \end{aligned}$$

То есть $d^2 y = f^{(2)}(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x$. Нетрудно убедиться, что второй дифференциал и последующие тем более не обладают инвариантностью формы.

Правило вычисления алгебраической суммы двух функций легко переносится на случай n — ой производной, однако с произведением возникают проблемы. Для вычисления производной n — го порядка от произведения двух функций используют **формулу Лейбница**:

$$(f(x) * g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i * f^{(i)}(x) * g^{(n-i)}(x).$$

Докажем её по индукции.

$$\begin{aligned} \text{При } n = 1 \quad (f(x) * g(x))^{(1)} &= C_1^0 * f^{(0)}(x) * g^{(1)}(x) + C_1^1 * f^{(1)}(x) * g^{(0)}(x) = \\ &= f(x) * g'(x) + f'(x) * g(x). \end{aligned}$$

Формула справедлива по правилам дифференцирования произведения функций.

Пусть формула верна для n . Докажем, что она верна для $n + 1$ (пусть для простоты $f(x) = f, g(x) = g$).

$$\begin{aligned}
(f * g)^{(n+1)} &= ((f * g)^{(n)})' = \left(\sum_{i=0}^n C_n^i * f^{(i)} * g^{(n-i)} \right)' = \\
&= (C_n^0 * f^{(0)} * g^{(n)} + C_n^1 * f^{(1)} * g^{(n-1)} + C_n^2 * f^{(2)} * g^{(n-2)} + \dots + C_n^n * f^{(n)} * g^{(0)})' = \\
&= C_n^0 * f^{(0)} * g^{(n+1)} + C_n^0 * f^{(1)} * g^{(n)} + C_n^1 * f^{(1)} * g^{(n)} + C_n^1 * f^{(2)} * g^{(n-1)} + \\
&+ C_n^2 * f^{(2)} * g^{(n-1)} + C_n^2 * f^{(3)} * g^{(n-2)} + \dots + C_n^n * f^{(n)} * g^{(1)} + C_n^n * f^{(n+1)} * g^{(0)} = \\
&= C_n^0 * f^{(0)} * g^{(n+1)} + (C_n^0 + C_n^1) * f^{(1)} * g^{(n)} + (C_n^1 + C_n^2) * f^{(2)} * g^{(n-1)} + \dots + \\
&+ C_n^n * f^{(n+1)} * g^{(0)}.
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что перед слагаемыми меняются коэффициенты на сумму двух, следующих друг за другом биномиальных.

$$\begin{aligned}
C_n^i + C_n^{i+1} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} = \frac{n! * (i+1) + n! * (n-i)}{(i+1)!(n-i)!} = \\
&= \frac{n! * (n-i+i+1)}{(i+1)!(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)! * ((n+1) - (i+1))!} = C_{n+1}^{i+1}
\end{aligned}$$

Учтём также тот факт, что $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1, C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$. Тогда вышеуказанное равенство примет вид:

$$\begin{aligned}
(f * g)^{(n+1)} &= C_{n+1}^0 * f^{(0)} * g^{(n+1)} + (C_{n+1}^1) * f^{(1)} * g^{(n)} + (C_{n+1}^2) * f^{(2)} * g^{(n-1)} + \dots \\
&+ C_{n+1}^{n+1} * f^{(n+1)} * g^{(0)} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i * f^{(i)} * g^{(n+1-i)}.
\end{aligned}$$

Шаг индукции доказан и, следовательно, **формула доказана**.

Назовём функцию **параметрической**, если обе переменные y и x заданы как функции некоторой третьей переменной t : $x = f(t), y = g(t)$. При этом t называют **параметром**.

Будем считать, что $f(t), g(t)$ имеют нужное количество производных, а функция $f(t)$ имеет обратную в окрестности рассматриваемой точки t .

Справедливы следующие равенства:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = g'(t)dt, \quad dx = f'(t)dt.$$

$$\text{Отсюда вытекает, что } y'(x) = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала $y^{(2)}(x) = \frac{d[y'(x)]}{dx}$.

$$\text{Тогда } y^{(2)}(x) = \frac{\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)' dt}{f'(t) * dt} = \frac{f^{(2)}(t) * g'(t) - g^{(2)}(t) * f'(t)}{[f'(t)]^3}$$

По такому же принципу вычисляются производные третьего и последующего порядков.

$$y^{(n)}(x) = \frac{d[y^{(n-1)}(x)]}{dx}.$$

Пример.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, -\infty < t < +\infty$$

Воспользовавшись выведенными формулами, получим:

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{t}{2} \right)$$

$$y^{(2)}(x) = \frac{\left(\operatorname{ctg} \left(\frac{t}{2} \right) \right)'}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a * \sin^4 \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

Билет 24

Понятие возрастания в точке и локального экстремума функции. Достаточное условие возрастания и необходимое условие экстремума в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки c .

$f(x)$ **возрастает в точке c** , если $\exists \delta: \forall \begin{cases} \forall x: x \in (c - \delta; c) \Rightarrow f(x) < f(c) \\ \forall x: x \in (c; c + \delta) \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$.

$f(x)$ **убывает в точке c** , если $\exists \delta: \forall \begin{cases} \forall x: x \in (c - \delta; c) \Rightarrow f(x) > f(c) \\ \forall x: x \in (c; c + \delta) \Rightarrow f(x) < f(c) \end{cases}$.

$f(x)$ **имеет локальный максимум в точке c** , если $\exists \delta: \forall x \in (c - \delta; c + \delta) \setminus \{c\}: f(c) > f(x)$.

$f(x)$ **имеет локальный минимум в точке c** , если $\exists \delta: \forall x \in (c - \delta; c + \delta) \setminus \{c\}: f(c) < f(x)$.

$f(x)$ **имеет локальный экстремум в точке c** , если $f(x)$ имеет локальный максимум или минимум в точке c .

Отметим, что из того, что $f(x)$ возрастает (убывает) в $\forall x \in \{x\}$ не следует возрастание (убывание) $f(x)$ на $\{x\}$. В качестве примера можно привести функцию $y = tg(x)$ ($y = ctg(x)$), возрастающую (убывающую) лишь на интервалах вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi K; \frac{\pi}{2} + 2\pi K\right)$ ($(2\pi K; \pi + 2\pi K)$), $K \in \mathbb{Z}$.

Отметим также, что из условия возрастания $f(x)$ в точке x не следует, что $\exists \delta$ — окрестность точки x , в которой $f(x)$ возрастает (убывает). Примером может служить функция $f(x) = \begin{cases} x * \left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Данная функция

возрастает в точке $x = 0$, но при этом $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ вблизи $x = 0$ очень быстро изменяется от 1 до $-1 \Rightarrow \forall \delta > 0$ при $x \rightarrow 0$ на $(x; x + \delta)$ меняется характер монотонности $\Rightarrow \nexists$ искомой окрестности.

Теорема (достаточное условие возрастания/убывания функции в точке).

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности x_0 , дифференцируема в x_0 , $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) $\Rightarrow f(x)$ возрастает (убывает) в x_0 .

Доказательство:

Пускай $f'(x_0) > 0$. По определению $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

По определению предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Так как неравенство верно для $\forall \varepsilon > 0$, то пусть $\varepsilon = f'(x_0)$.

$$\text{Тогда } \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0) \Rightarrow 0 < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 2f'(x_0)$$

$$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\text{В частности, } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > f(x_0) \text{ при } x > x_0 \\ f(x) < f(x_0) \text{ при } x < x_0 \end{matrix} \Rightarrow f(x) \text{ возрастает в } x_0.$$

Для случая $f'(x_0) < 0$ следует взять $\varepsilon = -f'(x_0)$, что приведёт к изменению знака в конечных неравенствах, откуда будет следовать, что $f(x)$ будет убывать в x_0 .

Теорема доказана.

Замечание. Данное условие достаточно, но не необходимо. Например, $f(x) = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, хотя $f'(0) = 0$.

Теорема (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции). Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности x_0 , дифференцируема в x_0 , x_0 – точка локального экстремума $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Доказательство:

Пусть $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает в $x_0 \Rightarrow$ противоречие.

Пусть $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает в $x_0 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Данное условие необходимо, но не достаточно. Например, для $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, хотя $f(x)$ возрастает в точке $x = 0$. Отметим также, что это утверждение справедливо лишь для дифференцируемых функций. Так, для $f(x) = |x|$ $\nexists f'(0)$, хотя $x = 0$ – точка минимума.

Геометрический смысл данного утверждения состоит в том, что если в точке x_0 к кривой $y = f(x)$ существует касательная, то она обязательно параллельна оси абсцисс.

Билет 25

Теорема о нуле производной (теорема Ролля) и ее геометрический смысл

Теорема Ролля. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Пусть, кроме того, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a; b): f'(c) = 0$. (Между двумя равными значениями дифференцируемой функции обязательно лежит нуль производной).

Доказательство:

По второй теореме Вейерштрасса, так как $y = f(x) \in C[a; b]$, то $\exists x', x''$:
 $f(x') = m = \inf_{[a; b]} f(x), f(x'') = M = \sup_{[a; b]} f(x)$. Возможны два случая:

1) $M = m$; 2) $M > m$.

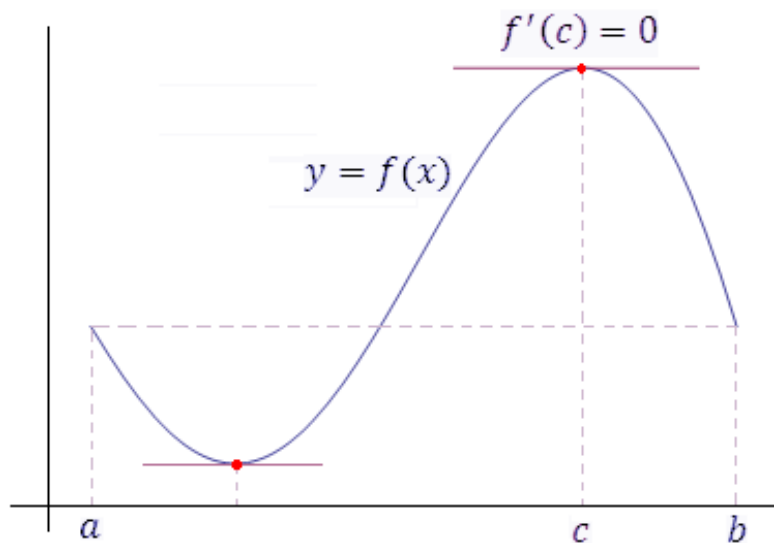
1) Раз $M = m$, то на $[a; b]$ функция $f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in [a; b] f'(x) = 0$.

2) Раз $M > m$, а $f(a) = f(b)$, то хотя бы одна из точек $x', x'' \in (a, b)$ (поскольку в a и b не могут одновременно достигаться и m , и M). Обозначим эту точку как c . Но тогда c — локальный экстремум $\Rightarrow f'(c) = 0$ по необходимому условию локального экстремума дифференцируемой функции (так как $f(x)$ дифференцируема).

Теорема доказана.

Замечание. Вместо непрерывности на $[a; b]$ ввиду дифференцируемости на $(a; b)$ можно было запросить лишь непрерывности в точках $a + 0, b - 0$.

Геометрический смысл данной теоремы состоит в том, что если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на этой кривой найдётся хотя бы одна точка, в которой касательная к ней параллельна оси абсцисс.



Билет 26

Формула конечных приращений (теорема Лагранжа). Следствия теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b) \Rightarrow \exists c \in [a; b]: f(b) - f(a) = f'(c) * (b - a)$ (формула конечных приращений, или формула Лагранжа).

Доказательство:

Рассмотрим $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

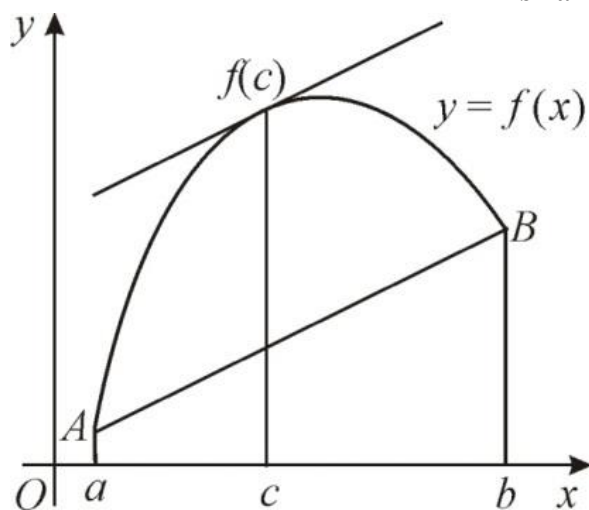
$g(x)$ непрерывна на $[a; b]$, так как $\lim_{x \rightarrow t} g(x) = g(t)$, $g(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ как комбинация элементарных функций, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Кроме того, $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$,

$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (b-a) = 0$.

Тогда $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow \exists c \in (a; b): g'(c) = 0$.

Иначе говоря, $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c) * (b-a)$.



Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что между точками $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ найдётся точка $C(c; f(c))$ такая, что касательная к ней параллельна хорде AB (так как $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — угловой коэффициент секущей AB , $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке C).

Следствие 1. Пусть $y = f(x)$ определена и дифференцируема на $(a; b)$, причём $\forall x \in (a; b) f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const}$.

Доказательство:

Фиксируем произвольное $x_0 \in (a, b)$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ промежуток $[x; x_0]$, если $x < x_0$, или $[x_0, x]$, если $x > x_0$, полностью принадлежит интервалу $(a; b): [x; x_0] \in (a; b) \text{ } ([x_0, x] \in (a; b)) \Rightarrow$ применим теорему Лагранжа на $[x; x_0] \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c) * (x - x_0) = 0$ (так как $f'(c) = 0$) $\Rightarrow f(x) = f(x_0) \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = \text{const}$, т. к. x_0 зафиксировано.

Следствие доказано.

Замечание. Если $f'(x) = 0$ при $x \in (a; b) \cup (c, d)$, то следствие может быть несправедливо. Значения на интервалах будут константами, но, возможно, разными.

Геометрический смысл следствия в том, что если касательная в каждой точке кривой прямой параллельна оси абсцисс, то и участок кривой параллелен оси абсцисс.

Следствие 2. Функция $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и не убывает (не возрастает) на нём $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a; b)$.

Доказательство:

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Пусть $x', x'' \in (a; b)$, $x' < x''$. Так как $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$, то она непрерывна на $[a; b]$. Тогда по т. Лагранжа $f(x'') - f(x') = (x'' - x') * f'(c)$, где $c \in (x'; x'')$. Так как по условию $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x'' - x' > 0$, то $f(x'') - f(x') \geq 0$ (≤ 0).

Необходимость. Пусть Функция $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и не убывает (не возрастает) на нём. Так как $f(x)$ не убывает (не возрастает) на всём интервале, то она не может убывать (возрастать) $\forall x \in (a; b)$. Значит, по достаточному условию возрастания функции в точке, $f'(x)$ не может быть меньше (больше нуля) $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть $y = f(x)$ определена и дифференцируема на $(a; b)$, причём $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ возрастает (убывает) на $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть $f'(x) > 0$ (< 0). Пусть $x', x'' \in (a; b)$, $x' < x''$. Так как $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$, то она непрерывна на $[a; b]$. Тогда по т. Лагранжа $f(x'') - f(x') = (x'' - x') * f'(c)$, где $c \in (x'; x'')$. Так как по условию $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), $x'' - x' > 0$, то $f(x'') - f(x') > 0$ (< 0).

Следствие доказано.

Геометрический смысл данного следствия состоит в том, что если касательная к графику в точке образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс, то функция возрастает, а если тупой – убывает.

Замечание. В отличие от следствия 2, данное условие является лишь достаточным, но не необходимым условием возрастания (убывания) на интервале. Это подтверждается, например, неоднократно упомянутой функцией $y = x^3$: в $x = 0$ $f'(x) = 0$, хотя она возрастает.

Следствие 4. Пусть $y = f(x)$ определена и дифференцируема на $(a; b)$, причём $|f'(x)| \leq C = \text{const} \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $(a; b)$.

Доказательство:

Выберем две произвольные точки $x', x'' \in (a; b)$. Тогда по т. Лагранжа на $[x'; x'']$ (функция дифференцируема по условию) $\Rightarrow$
 $|f(x') - f(x'')| = |f'(c)| * |x' - x''|$. По условию $f'(c) \leq C$. Положим, что $|x' - x''| < \delta = \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < C * \delta = C * \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.

Произвольно изменяя точки x', x'' для всего интервала, мы получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C}: \forall x', x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

А это условие является условием равномерной непрерывности.

Следствие доказано.

Следствие 5. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $(c; c + \delta)$ $((c - \delta; c))$ ($\delta > 0$), при этом $\exists \lim_{x \rightarrow c+0} f'(x)$ $(\exists \lim_{x \rightarrow c-0} f'(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} f'(x) = f'(c + 0)$ $(\lim_{x \rightarrow c-0} f'(x) = f'(c - 0))$.

Доказательство:

Так как $\exists f'(c + 0)$ $(f'(c - 0))$, то $\exists \lim_{x \rightarrow c+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)$
 $(\lim_{x \rightarrow c-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c-0} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow c+0} \{f(x) - f(c)\} = 0$ $(\exists \lim_{x \rightarrow c-0} \{f(x) - f(c)\} = 0 \Rightarrow f(x)$ непрерывна в c справа (слева)).

Фиксируем некоторое $x \in (c; c + \delta)$ $((c - \delta; c))$. $f(x)$ дифференцируема, следовательно, непрерывна на интервале, а также в точке c справа (слева). Тогда по т. Лагранжа на сегменте $[c; x]$ $([x; c]) \Rightarrow f(x) - f(c) = f'(a) * (x - c)$, где $a \in [x, c] \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(a)$.

Переходя к пределам, мы получим, что $\lim_{x \rightarrow c+0} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(a) = f'(c + 0)$ (так как $a \rightarrow c + 0$ при $x \rightarrow c + 0$) $(\lim_{x \rightarrow c-0} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(c - 0))$.

Следствие доказано.

Из данного следствия вытекает важное утверждение: **производная не может иметь устранимых разрывов или разрывов первого рода**. Действительно, в силу доказанного следствия $\lim_{x \rightarrow c+0} (f'(x)) = f'(c + 0)$,

$$\lim_{x \rightarrow c-0} (f'(x)) = f'(c - 0) \Rightarrow \text{так как } f'(c + 0) = f'(c - 0) = f'(c) \Rightarrow$$

$\lim_{x \rightarrow c-0} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow c+0} (f'(x)) = f'(c) \Rightarrow f'(x)$ непрерывна в точке c .

Следовательно, разрыв может возникнуть, если не существует хотя бы одного конечного предела $\lim_{x \rightarrow c-0} (f'(x))$ или $\lim_{x \rightarrow c+0} (f'(x))$, что по определению является разрывом второго рода.

.

Билет 27

Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши)

Теорема Коши.

Пусть $f(x), g(x) \in C[a; b]$, дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0$ на $[a; b]$

$$\Rightarrow \exists c \in (a; b): \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ (формула Коши).}$$

Доказательство:

Пусть $g(b) = g(a) \Rightarrow \exists c \in (a; b): f'(c) = 0$ (по т. Ролля) $\Rightarrow$ противоречие условию $\Rightarrow g(b) \neq g(a)$.

Тогда рассмотрим $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * (g(x) - g(a))$. Ввиду того, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а $g(b) \neq g(a)$, $F(x)$ тоже непрерывна. Более того, $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$, при этом $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(x)$.

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(a) - g(a)) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(b) - g(a)) = 0;$$

Так как $F(a) = F(b)$, то по теореме Ролля $\exists c \in (a; b): F'(c) = 0$.

$$\text{Тогда } f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$.

Билет 28

Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя)

Первое правило Лопиталя. Пусть $f(x), g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки a . Пусть, кроме того, $f(x), g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, $g'(x) \neq 0$ в данной окрестности точки a , а также $\exists \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$, конечный или бесконечный, то тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство:

Доопределим функции в точке a нулём. В таком случае функции непрерывны в окрестности точки a : непрерывность на $(a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$ следует из дифференцируемости, а ввиду сходимости к 0 в точке a , они также непрерывны и в ней.

Выберем последовательность аргументов $\{x_n\} \rightarrow a$. Тогда можно применить теорему Коши к сегменту, ограниченному точкой a и некоторым элементом $x_n \in (a - \delta; a + \delta)$.

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ где } c \text{ находится между } x_n \text{ и } a.$$

Но ввиду того, что $f(a) = g(a) = 0$, то $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Пусть теперь $n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow a \Rightarrow c \rightarrow a \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Иначе говоря, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Данная теорема справедлива как для случая $x \rightarrow a \pm 0$, так и для случаев $x \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow \infty$

Для $x \rightarrow a \pm 0$ всё так же доопределяем функцию в т. a нулём, а последовательность аргументов выбираем из соответствующей поукрестности, применяя теорему Коши и получая искомое равенство.

Для случая $x \rightarrow \pm\infty$ рассмотрим лишь $x \rightarrow +\infty$ (другой случай аналогичен). Пусть функции будут определены и дифференцируемы на $(a; +\infty)$. Введём замену переменной $t = \frac{1}{x}$, при $x \rightarrow +\infty t \rightarrow 0 + 0$. Тогда введём функции

$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$. Отметим, что $\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{\left(f'\left(\frac{1}{t}\right) * \left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) * \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Введём условие $t \neq 0$. Более того, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)}$.

В таком случае уже справедлива исходная теорема для $a = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Для случая $x \rightarrow -\infty$ необходимо рассмотреть соответственно интервал $(-\infty; a)$ и переменную $t \rightarrow 0 - 0$.

Для $x \rightarrow \infty$ рассматриваем функции на $(-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty)$ для некоторого $\delta > 0$.

Замечание 2. Правило Лопиталья не является необходимым условием

существования предела. Например, при нахождении предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$ по

правилу Лопиталья мы получим, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x * \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}$, но его

не существует, так как $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. В то же время $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} * \lim_{x \rightarrow 0} x * \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Замечание 3. Если производные функций удовлетворяют тем же условиям теоремы, то к ним повторно можно применить правило Лопиталья. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Второе правило Лопиталья. Пусть $f(x), g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки a . Пусть, кроме того, $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, $g'(x) \neq 0$ в данной окрестности точки a , а также

$\exists \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, конечный или бесконечный, то тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство:

Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = b$, где b — конечное число. Выберем $\forall \{x_n\} \rightarrow a + 0$.

По определению предела функции по Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x \in (a; a + \delta) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению предела последовательности $\forall \delta > 0 \exists N(\delta): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \leq \delta$. Зафиксируем некоторое $m \geq N$. Рассмотрим $\forall n \geq N$. Поскольку последовательность сходится справа, то $x_n \leq x_m$.

Тогда на $[x_n; x_m]$ можно применить теорему Коши. Тогда $\exists c \in (x_n; x_m)$:

$$\frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} * \frac{\left(1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}\right)}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

По теореме Коши $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{\left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right)}{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$

Отметим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists m(\varepsilon): \forall n \geq m \frac{f'(c)}{g'(c)} = b + \alpha_{mn}$, где $|\alpha_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2}$, поскольку $c \in (x_n; x_m)$, а предел существует.

Пусть $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right)}{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}} = 1$, или, $\frac{\left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right)}{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}} = 1 + \beta_{mn}$, где $|\beta_{mn}| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \exists n_0(\varepsilon) \geq m: \forall n \geq n_0 |\beta_{mn}| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}}$

Тогда $\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - b \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{\left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right)}{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}} - b \right| \leq |(b + \alpha_{mn}) * (1 + \beta_{mn}) - b| =$
 $= |b + b * \beta_{mn} + \alpha_{mn} + \alpha_{mn} * \beta_{mn} - b| = |b * \beta_{mn} + \alpha_{mn} + \alpha_{mn} * \beta_{mn}| \leq$
 $(|b| + |\alpha_{mn}|) * |\beta_{mn}| + |\alpha_{mn}| \leq \left(|b| + \frac{\varepsilon}{2}\right) * \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Выходит, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - b \right| < \varepsilon.$

В свою очередь, это определение предела по Коши, то есть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Пускай теперь $\exists \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)} \right) = 0 \Rightarrow$ ввиду того, что $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности, но $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \infty$, то $f'(x) \neq 0$,

возможно применить уже доказанный случай конечного предела, то есть $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \infty.$

Теорема доказана.

Замечание. Подобно предыдущей, данная теорема справедлива для случаев $x \rightarrow a \pm 0, x \rightarrow \pm \infty, x \rightarrow \infty$. Доказательство проводится по такому же принципу.

Раскрытие иных неопределённостей.

Нередко встречаются неопределённости других видов: $0 * \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .

Зачастую их сводят к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределённости 1^∞ , ∞^0 , 0^0 имеют вид $y = f(x)^{g(x)}$. Это выражения логарифмируют и получают новое $\ln(y) = g(x) * \ln(f(x))$, которое, в свою очередь, уже является неопределённостью $0 * \infty$.

Неопределённость $0 * \infty$ раскрывают следующим образом.

Пусть $y = f(x) * g(x)$, причём $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$.

Выражение переписывают как $y = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, уже представляющее неопределённость $\frac{0}{0}$.

Неопределённость $\infty - \infty$ тоже сводят к виду $\frac{0}{0}$.

$$y = f(x) - g(x) \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} * \frac{1}{g(x)}}.$$

В результате таких преобразований к выражениям можно применить правило Лопиталя.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0+0} (x^x) \Rightarrow y = x^x \Rightarrow \ln(y) = x * \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$. По правилу

Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(y)) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} (x) = 0$.

Тогда, раз $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(y)) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0+0} (y) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^x) = 1$.

Билет 29

Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша)

Теорема Тейлора (с остаточным членом в общей форме, или в форме Шлемильха-Роша). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки a и $n + 1$ раз дифференцируема в этой окрестности $\Rightarrow \forall x$ из данной окрестности, $\forall p > 0 \exists \xi$ между a и x такая, что будет справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \text{ или}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) + R_{n+1}(x),$$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p * \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} * f^{n+1}(\xi).$$

Данную формулу называют **формулой Тейлора (с центром в т. а).**

Доказательство:

Обозначим как $g(x, a)$ многочлен, равный многочлену в правой части формулы:

$$g(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

В таком случае $R_{n+1}(x) = f(x) - g(x, a)$.

Фиксируем некоторое x из окрестности точки a . Для определённости пусть $x > a$. Тогда рассмотрим переменную $t \in (a; x)$ и $g(x, t)$.

$$g(x, t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Тогда рассмотрим ещё одну вспомогательную функцию $h(t)$:

$$h(t) = f(x) - g(x, t) - \left(\frac{x-t}{x-a} \right)^p * R_{n+1}(x)$$

Эта функция непрерывна на $[a; x]$ и дифференцируема на $(a; x)$ (поскольку функция $f(x)$ дифференцируема $n + 1$ раз на указанном сегменте, то она сама и n её первых производных непрерывны и дифференцируемы на сегменте). Кроме того,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(x) - g(x, a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0; \\ h(x) &= f(x) - g(x, x) = f(x) - f(x) = 0; \end{aligned}$$

Следовательно, к данной функции применима теорема Ролля на сегменте $[a; x] \Rightarrow \exists \xi \in (a; x): h'(\xi) = 0$.

Найдём производную данной функции.

$$\begin{aligned} h(t) &= f(x) - g(x, t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p * R_{n+1}(x) = \\ &= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p * R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} * 2(x-t) - \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{p(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x) = \\ &= \frac{p(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x) - \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } h'(\xi) = \frac{p(x-\xi)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x) - \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(x-\xi)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{\left(\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right)}{\frac{p(x-\xi)^{p-1}}{(x-a)^p}} \Rightarrow$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(f^{n+1}(\xi) * (x-\xi)^n) * (x-a)^p}{n! p (x-\xi)^{p-1}} = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p * \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! p} * f^{n+1}(\xi).$$

Следовательно, $R_{n+1}(x)$ определяется указанной формулой. Случай, когда $x < a$, рассматривается абсолютно аналогично.

Теорема доказана.

Билет 30

Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа, Коши и Пеано. Его оценка.

Рассмотрим формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме. По условию ξ лежит между a и $x \Rightarrow \exists \theta(p) \in (0; 1): \xi - a = \theta(x - a)$ (расстояние между точками ξ и a меньше, чем между x и a) $\Rightarrow \xi = a + \theta(x - a)$,
 $x - \xi = (x - a)(1 - \theta)$;

Тогда перепишем остаточный член, исключив оттуда ξ :

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p * \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} * f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^{n-p+1} * (x-a)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a));$$

В качестве p в формуле может быть взято любое положительное число. Рассмотрим два частных случая: $p = n + 1, p = 1$;

$$p = n + 1 \Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) - \text{форма Лагранжа};$$

$$p = 1 \Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n * (x-a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) - \text{форма Коши}.$$

С помощью остаточного члена в форме Лагранжа формулу Тейлора записывают несколько иначе, полагая, что $a = x_0, x - a = \Delta x$.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n + \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)$$

Отдельно рассмотрим остаточный член в форме Пеано.

Теорема Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(x)$ $n - 1$ раз дифференцируема в окрестности точки a и n раз дифференцируема в этой точке $\Rightarrow \forall x$ из данной окрестности справедлива формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n),$$

Доказательство:

Обозначим как $g(x, a)$ многочлен, равный многочлену в правой части формулы:

$$g(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

В таком случае $R_{n+1}(x) = f(x) - g(x, a) = h(x)$.

Пусть $g^{(n)}(x, a)$ – n – ая производная $g(x, a)$ по x . Нетрудно заметить, что $g(a, a) = f(a), g'(a, a) = f'(a) \dots g^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a) \Rightarrow g^{(k)}(a, a) = f^{(k)}(a) \forall k \in [0; n] \Rightarrow h^{(k)}(a) = 0 \forall k \in [0; n]$ (при дифференцировании данной функции будут лишь оставаться слагаемые $f^{(k)}(a)$ и $g^{(k)}(a, a)$, которые при вычитании дадут ноль).

Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h(x)}{(x-a)^n} \right)$. $h(x) \rightarrow 0, (x-a)^n \rightarrow 0$. Следовательно, в данном случае имеется неопределённость вида $\frac{0}{0}$. В проколотой окрестности точки a знаменатель не обращается в нуль, а данные функции определены, непрерывны и дифференцируемы в данной окрестности по наложенным условиям. В таком случае можно применить первое правило Лопиталя.

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h(x)}{(x-a)^n} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \right)$. Нетрудно заметить, что для данного предела вновь выполняются все условия первого правила Лопиталя и, более того, они также и выполняются для следующих пределов вплоть до n – го шага (ввиду дифференцируемости n раз в точке a функции $f(x)$). Применяя последовательно правило Лопиталя, мы получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h(x)}{(x-a)^n} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h''(x)}{n * (n-1) * (x-a)^{n-2}} \right) = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h^{(n)}(x)}{n!} \right) = 0 \text{ (т. к. } h^{(n)}(x) \rightarrow 0, n! \neq 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h(x)}{(x-a)^n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Но тогда по определению $R_{n+1} = h(x) = o((x-a)^n)$.

Теорема доказана.

Оценим остаточный член, взятый в форме Лагранжа.

Пусть $\forall k \in [1; N] |f^{(k)}(x)| \leq M \forall x$ из окрестности a .

$$\text{Тогда } |R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x-a)^{n+1}| \leq \varepsilon$$

(данное выражение всегда можно сделать сколь угодно малым, поскольку

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|(x-a)^{n+1}|}{(n+1)!} \right) = 0$). Таким образом, возможно вычислять значения функций в окрестности некоторой точки a с любой наперёд заданной точностью. Чем больше будет взято слагаемых, тем точнее будет результат.

Билет 31

Разложение по формуле Тейлора-Маклорена элементарных функций.

Примеры приложений формулы Тейлора для приближённых вычислений элементарных функций и пределов

Формулой Тейлора-Маклорена называют формулу Тейлора с центром в т. $a = 0$. Тогда она принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \text{ где}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) - \text{в форме Лагранжа};$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) - \text{в форме Коши};$$

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) - \text{в форме Пеано.}$$

1. Пускай $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1 \forall n$, формула Маклорена примет вид:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} * e^{\theta x}, \theta \in (0; 1);$$

Пусть $|x| \leq r$; тогда $M = e^r \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$.

2. Пускай $f(x) = \sin(x)$. Тогда $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. В таком случае

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n = 2k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

С учётом этого факта формула Маклорена примет вид:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!} + R_{n+2}(x) \ (n = 2k - 1);$$

Поскольку $R_{n+1}(x) = 0$, то в формуле используется $R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin\left(\theta x + \frac{(n+2)\pi}{2}\right)$.

Пусть $|x| \leq r$, очевидно, $M = 1 \Rightarrow |R_{n+2}(x)| \leq \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$.

3. Пускай $f(x) = \cos(x)$. Тогда $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. В таком случае

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{если } n = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

С учётом этого факта формула Маклорена примет вид:

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!} + R_{n+2}(x) \quad (n = 2k);$$

Поскольку $R_{n+1}(x) = 0$, то в формуле используется $R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cos\left(\theta x + \frac{(n+2)\pi}{2}\right)$.

Пусть $|x| \leq r$, очевидно, $M = 1 \Rightarrow |R_{n+2}(x)| \leq \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$;

4. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} * \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; $f(0) = 0$;

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} * (n-1)!$ В таком случае формула Маклорена примет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $\theta \in (0; 1)$ (в форме Лагранжа)

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1} * (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (\text{в форме Коши})$$

Отметим, что данное разложение справедливо для $x \in (-1; 1]$.

Оценим сначала $R_{n+1}(x)$ для $x \in [0; 1]$. Используем форму Лагранжа.

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

При $n \rightarrow \infty$ $|R_{n+1}(x)| \rightarrow 0$.

Для $r > 0$, $x \in (-r; 0)$ используем форму Коши ($|x| < r$, $\frac{(1-\theta)}{(1+\theta x)} \leq 1$)

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{n+1} * (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{r^{n+1} * 1}{(1-\theta r)} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

При $n \rightarrow \infty$ $|R_{n+1}(x)| \rightarrow 0$, т.к. $r < 1$.

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f^{(n)}(x) = \alpha * (\alpha - 1) * \dots * (\alpha - n + 1) * (1+x)^{\alpha-n};$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha * (\alpha - 1) * \dots * (\alpha - n + 1).$$

Тогда формула Маклорена примет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} * x^{n+1}.$$

$$6. f(x) = \arctg(x).$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} * \sin \left[n \left(\arctg(x) + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ и, следовательно,}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \ (k \in Z) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} * (n-1)!, & \text{если } n = 2k-1 \ (k \in Z) \end{cases}$$

Формула Маклорена тогда примет вид

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} * \frac{x^n}{n} + R_{n+2}(x), \text{ где}$$

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{n+2} * \left(\frac{\sin \left[(n+2) * \left(\arctg(\theta x) + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{[1 + (\theta x)^2]^{\frac{n+2}{2}}} \right)$$

Пусть $|x| < r \Rightarrow |R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{n+2} \rightarrow 0$ при $|r| < 1, n \rightarrow \infty$.

Формула Маклорена используется для вычислений значений элементарных функций.

Например, данная формула использовалась для вычисления значения числа e . Полагая, что $x = r = 1$, было получено, что $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}$, где $|R_{n+1}(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Значение данного числа было вычислено на ЭВМ с точностью до 600 знаков после запятой.

Также формула Маклорена используется для вычисления значений тригонометрических функций. Поскольку их значения при $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ определяют все их значения для любых x , то, положив, что $n = 5, r = \frac{\pi}{4}$, получим, что $|R_{n+2}(x)| = |R_7(x)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^7}{7!} < 10^{-4}$. Тогда для синуса

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x: |x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ с точностью до } 10^{-4}$$

Аналогично для косинуса положив, что $n = 6, r = \frac{\pi}{4}$, получим, что

$$|R_{n+2}(x)| = |R_8(x)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^8}{8!} < 10^{-5}, \text{ то есть}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}. \quad \forall x: |x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ с точностью до } 10^{-5}$$

Кроме того, формула Маклорена используется для вычисления пределов.
Например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3!} + o(x) \right) = -\frac{1}{6};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x)}{x^3 * \sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4 + o(x^4)} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Билет 32

Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции.

Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.

Функция $F(x)$ называется **первообразной к функции $f(x)$ на $(a; b)$** [(или $(-\infty; a)$, или $(a; +\infty)$, или $(-\infty; +\infty)$], если $\forall x \in (a; b)$ (или на указанных промежутках) функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос, каким образом связаны между собой первообразные функции.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на $(a; b)$, то $\forall x \in (a; b) F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так как $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируемы на $(a; b)$, то по правилам дифференцирования $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Ввиду следствия 1 из теоремы Лагранжа $\Phi(x) = const \Rightarrow$

$$F_1(x) - F_2(x) = C = const, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на $(a; b)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ для этой же функции на том же интервале имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C = const$.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называется совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$. Обозначается он как $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, а $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Если первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ существует (а, значит, и неопределённый интеграл), то подынтегральное выражение является дифференциалом любой такой первообразной ($dF = F'(x)dx = f(x)dx$).

Теорема. $\forall f(x) \in C(a; b) \exists F(x), \exists \int f(x)dx$, где $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$.

Доказательство: К сожалению, ввиду незнания интеграла Римана, диаметра разбиения и прочих великолепных вещей, мы это доказать не можем ☹
ПОКА (отметим, кстати, что не все интегрируемы в элементарных функциях)

Свойства неопределённого интеграла:

1. $d \int f(x) dx = f(x) dx$

($F(x)$ – первообразная, т. е. $d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx$)

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$

($\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$)

3. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

(пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, $G(x)$ – для $g(x)$).

$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

Отсюда непосредственно $\int (f(x) \pm g(x)) dx = F(x) \pm G(x) + C;$

но $\int f(x) dx = F(x) + C_1; \int g(x) dx = G(x) + C_2 \Rightarrow$

$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

4. $\int [Af(x)] dx = A \int f(x) dx$, где $A = const.$

($[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x) \Rightarrow \int Af(x) dx = AF(x) + C = A \int f(x) dx$)

Таблица простейших неопределённых интегралов:

Отметим, что равенства носят условный характер: они верны с точностью до константы.

1. $\int 0 * dx = C;$

2. $\int 1 * dx = x + C;$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1);$

4. $\int \left(\frac{dx}{x}\right) = \ln|x| + C \ (x \neq 0);$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \ (0 < a \neq 1);$

6. $\int (\sin(x) dx) = -\cos(x) + C;$

7. $\int (\cos(x) dx) = \sin(x) + C;$

8. $\int \left(\frac{dx}{\cos^2(x)}\right) = \int (1 + tg^2(x)) = tg(x) + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right);$

9. $\int \left(\frac{dx}{\sin^2(x)}\right) = \int (1 + ctg^2(x)) = -ctg(x) + C \ (x \neq \pi n, n \in Z);$

10. $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \begin{cases} \arcsin(x) + C; \\ -\arccos(x) + C; \end{cases}$

11. $\int \left(\frac{dx}{1+x^2}\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) + C; \\ -\operatorname{arcctg}(x) + C; \end{cases}$

$$12. \int \left(\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \right) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C;$$

$$13. \int \left(\frac{dx}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (|x| \neq 1).$$

$$14. \int sh(x) dx = ch(x) + C;$$

$$15. \int ch(x) dx = sh(x) + C;$$

$$16. \int \left(\frac{dx}{ch^2(x)} \right) = th(x) + C;$$

$$17. \int \left(\frac{dx}{sh^2(x)} \right) = -cth(x) + C \quad (x \neq 0);$$

$$18. \int \left(\frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \right) = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$$

$$19. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C \quad (a > 0)$$

$$20. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$$

При интегрировании элементарных функций результат может быть непредставим в виде элементарных функций, например:

$$1. \int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона (интеграл ошибок);}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2. \int (\cos(x^2) dx) \\ 3. \int (\sin(x^2) dx) \end{array} \right\} - \text{интегралы Френеля;}$$

$$4. \int \left(\frac{dx}{\ln(x)} \right) \quad (0 < x \neq 1) - \text{интегральный логарифм;}$$

$$5. \int \left(\left(\frac{\cos(x)}{x} \right) dx \right) \quad (x \neq 0) - \text{интегральный косинус;}$$

$$6. \int \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right) dx \right) - \text{интегральный синус.}$$

Билет 33

Простейшие методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям)

Утверждение. Пусть функция $x = g(t)$ – дифференцируемая функция, $f(x)$ и $g(t)$ определены на соответствующих интервалах.

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$ на множестве значений функции $x = g(t)$.

Тогда $\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C$;

Доказательство:

$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(g(t)))' = F'(g(t)) * g'(t) = f(g(t)) * g'(t)$. Но тогда $\int f(g(t)) * g'(t)dt = F(g(t)) + C$, ч. т. д.

Утверждение доказано.

Примеры.

$$\int (\sin(3x))dx = \begin{cases} t = 3x \\ dx = d\left(\frac{1}{3}t\right) = \frac{1}{3}dt \end{cases} = \int \left(\frac{1}{3}\sin(t) dt\right) = -\frac{1}{3}\cos(t) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C;$$

$$\int e^{\cos(x)} * \sin(x) dx = \begin{cases} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{cases} = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos(x)} + C.$$

Теорема об интегрировании по частям. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на некотором множестве $\{x\}$ и, кроме того, существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная для $v'(x)u(x)$, причём справедлива формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство:

Ввиду наложенных условий справедливы следующие переходы:

$$(u(x) * v(x))' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x) \Rightarrow$$

$$(u(x) * v(x))' dx = u'(x) * v(x) dx + u(x) * v'(x) dx \Rightarrow$$

$$\int (u(x) * v(x))' dx = \int u'(x) * v(x) dx + \int u(x) * v'(x) dx \Rightarrow$$

$$u(x) * v(x) = \int u'(x) * v(x) dx + \int u(x) * v'(x) dx \Rightarrow$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема доказана.

Примеры.

$$\int e^x * x^2 dx = e^x * x^2 - 2 \int e^x * x dx = e^x * x^2 - 2e^x * x + 2 \int e^x dx = e^x * x^2 - 2e^x * x + 2e^x + C.$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x) dx &= -\cos(x) * x^2 + 2 \int (\cos(x) * x dx) = \\ &= -\cos(x) * x^2 + 2 \sin(x) * x - 2 \int (\sin(x)) dx \\ &= -\cos(x) * x^2 + 2 \sin(x) * x + 2 \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Таким же методом вычисляются некоторые интегралы, которые следует находить путём составления интегрального уравнения.

$$\begin{aligned} I = \int e^{ax} * \sin(bx) dx &= \frac{e^{ax} * \sin(bx)}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} * \cos(bx) dx = \\ &= \frac{e^{ax} * \sin(bx)}{a} - \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} * \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} * \sin(bx) dx \right); \end{aligned}$$

$$I = \frac{e^{ax} * \sin(bx)}{a} - \frac{b}{a^2} * e^{ax} * \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} I =>$$

$$I = e^{ax} * \frac{(a * \sin(bx) - b * \cos(bx))}{a^2 + b^2} + C;$$

Билет 34

Интегрируемость в элементарных функциях класса рациональных дробей (с вещественными коэффициентами)

Алгебраический многочлен n -й степени – выражение вида

$$f(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_{n-1} z + C_n,$$

Где $z = x + iy$ – переменное комплексное число, а $C_0, C_1, \dots, C_n$ – постоянные комплексные числа, $C_0 \neq 0$.

Для начала отметим несколько важных свойств, которые мы доказывать, конечно же, не будем (ибо лень, да и в курсе линейной алгебры они оказываются, потому что надо).

1. $\forall f(z), g(z)$ справедливо представление $f(z) = g(z) * q(z) + r(z)$.
2. Многочлен ненулевой степени $f(z)$ делится на $(z - b) \Leftrightarrow f(b) = 0$;
3. Основная теорема алгебры: *всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень*.
4. Алгебраический многочлен n -ой степени имеет ровно n корней.

Для многочлена, имеющего повторяющиеся корни, справедливо представление $f(z) = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta \dots (z - c)^\gamma$. Тогда говорят, что корень a имеет кратность α , b – кратность β и т. д.

5. Если комплексное число z является корнем многочлена с вещественными коэффициентами кратности a , то сопряженное ему комплексное число $\bar{z}$ также является корнем этого многочлена кратности a .

Рациональной дробью называется отношение двух алгебраических многочленов. Если алгебраических многочлены имеют вещественные коэффициенты, то такую дробь называют *рациональной с вещественными коэффициентами*.

Рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называют **правильной**, если степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$. В ином случае дробь называют **неправильной**.

Докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ – рациональная дробь с вещественными коэффициентами, а её знаменатель имеет корень кратности α . Тогда справедливо представление $f(x) = \frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} = \frac{C}{(x-a)^\alpha} + \frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-\beta} Q(x)}$, где C – некоторая константа, $\beta \geq 1, \beta \in \mathbb{Z}, S(x)$ – такой многочлен, что последняя дробь правильная, $Q(a) \neq 0$.

Доказательство:

$$\frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} - \frac{C}{(x-a)^\alpha} = \frac{P_m(x) - CQ(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)}.$$

Положим, что $C = \frac{P_m(a)}{Q(a)}$. Тогда $P_m(a) - \frac{P_m(a)}{Q(a)} * Q(a) = P_m(a) - P_m(a) = 0$, следовательно, данный многочлен имеет корень a некоторой кратности β . Тогда справедливо представление $P_m(x) - CQ(x) = (x-a)^\beta S(x)$ и, следовательно, $\frac{P_m(x)-CQ(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} = \frac{(x-a)^\beta S(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} = \frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-\beta} Q(x)}$. Из этого следует, что $\frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} - \frac{C}{(x-a)^\alpha} = \frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-\beta} Q(x)} \Rightarrow \frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha Q(x)} = \frac{C}{(x-a)^\alpha} + \frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-\beta} Q(x)}$.

По условию все дроби правильные. **Лемма доказана.**

Лемма 2. Пусть $f(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет комплексные корни z и $\bar{z}$ кратности β . Тогда $\exists M, N, (\gamma > 1)$:

справедливо представление $f(x) = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^\beta Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \frac{S(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-\gamma} Q(x)}$.

Доказательство:

$$z = a + bi: z^2 + pz + q = 0;$$

$$\bar{z} = a - bi: (\bar{z})^2 + p\bar{z} + q = 0. \text{ Тогда } p = -2a; q = a^2 + b^2.$$

В таком случае $(x-z)(x-\bar{z}) = (x^2 + px + q)$

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{P(x) - Q(x) * (Mx + N)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)}.$$

Будем обозначать вещественную часть комплексного числа z как $Re(z)$, а комплексную – как $Im(z)$.

Пусть z – корень $\varphi(x)$, т. е. $\varphi(z) = 0 \Rightarrow Re(\varphi(z)) = 0 \Rightarrow$

$P(z) - Q(z)(Mz + N) = 0 \Rightarrow Mz + N = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} Re(Mz + N) = Re\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) \\ Im(Mz + N) = Im\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } M = \frac{1}{b} * Im\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right), N = Re\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) - \frac{a}{b} Im\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right).$$

Тогда z действительно является корнем данного многочлена некоторой кратности γ , то есть справедливо представление $\varphi(x) = (x^2 + px + q)^\gamma S(x)$.

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{(x^2 + px + q)^\gamma S(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)} = \frac{S(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-\gamma} Q(x)} \Rightarrow$$

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{S(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-\gamma} Q(x)}.$$

Лемма доказана.

Последовательно применяя лемму 1 и 2 к произвольному многочлену, можно получить его разложение на простейшие дроби:

Если $Q(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - c)^\gamma (x^2 + p_1x + q_1)^\tau (x^2 + p_kx + q_k)^\omega$

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots \\ & \dots + \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \dots + \frac{C_\gamma}{(x - c)^\gamma} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \\ & + \frac{M_\tau x + N_\tau}{(x^2 + p_1x + q_1)^\tau} + \dots + \frac{K_1x + T_1}{x^2 + p_kx + q_k} + \dots + \frac{K_\omega x + T_\omega}{(x^2 + p_kx + q_k)^\omega}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, B_2, \dots, B_\beta, \dots$ представляют собой некоторые константы, причём некоторые из них могут быть равны нулю. Таким образом, это подводит нас к **методу неопределённых коэффициентов**.

Получив указанное разложение дроби, многочлены приводят к общему знаменателю, после чего находят искомые коэффициенты.

Пример.

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}.$$

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{(A(x^3 - 1) + B(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x^2 - 2x + 1))}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$$

Ввиду равенства знаменателей, получим систему

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ B + N - 2M = 4, \\ B + M - 2N = 1, \\ -A + B + N = 2. \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = 3, M = 0, N = 1.$$

Следовательно, получаем разложение

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Коэффициенты при старших степенях можно найти **методом**

вычёркиваний: поскольку в ходе доказательства было установлено, что для

дроби $\frac{C}{(x-a)^\alpha}$ $C = \frac{P_m(a)}{Q(a)}$, то путём вычёркивания из знаменателя скобки

$(x - a)$ и подстановки a в оставшееся выражение, мы получим значение коэффициента при старшей степени соответствующего корня. Данный метод справедлив лишь для вещественных корней $Q(x)$.

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)};$$

Методом вычёркиваний $f(1) = \frac{2+4+1+2}{1+1+1} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow B = 3$. Видно, что этот же результат мы получили путём решения системы. Особенно метод эффективен, если в знаменателе дроби присутствуют лишь вещественные однократные корни.

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2}.$$

$$A = f_1(1) = \frac{1+1}{1 * (1-2)} = -2;$$

$$B = f_2(0) = \frac{0+1}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2};$$

$$C = f_3(2) = \frac{2+1}{(2-1) * 2} = \frac{3}{2};$$

Получаем разложение $\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x-2)}.$

Теорема. Всякая рациональная дробь с вещественными коэффициентами интегрируема в элементарных функциях.

Доказательство:

Вопрос об интегрировании рациональной дроби сводится к вопросу об интегрировании правильной рациональной дроби, поскольку любую неправильную дробь можно привести к правильной путём деления, причём в результате получится некоторый многочлен, который, как известно, интегрируется в элементарных функциях (т. к. представление многочлена $f(x) = g(x) * q(x) + r(x)$ справедливо, то неправильная дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)*S(x)+r(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, где $\frac{r(x)}{Q(x)}$ — уже правильная дробь).

Ввиду справедливости вышеупомянутого разложения любой правильной дроби на простейшие, вопрос интегрирования правильной дроби сводится к 4-м случаям:

$$1. \int \left(\frac{A dx}{x-a} \right) = A \ln|x-a| + C;$$

$$2. \int \left(\frac{A dx}{(x-a)^\alpha} \right) = \frac{A}{\alpha-1} * (x-a)^{1-\alpha} + C;$$

$$3. \int \left(\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)} \right) = \begin{cases} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \end{cases} = \int \left(\frac{\left(Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \right) dt}{t^2 + a^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= M \int \left(\frac{tdt}{t^2 + a^2} \right) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \left(\frac{dt}{t^2 + a^2} \right) = \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a} \right) + C \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) + C; \\
4. \int \left(\frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^\alpha} \right) &= \begin{cases} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \end{cases} = \int \left(\frac{\left(Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \right) dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right) = \\
&= M \int \left(\frac{tdt}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \left(\frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right) = \frac{M}{2} \left(\frac{(t^2 + a^2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right) + \frac{2N - Mp}{2a} * I + C;
\end{aligned}$$

Возникает вопрос о вычислении интеграла $I = \int \left(\frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right)$. Для него следует установить рекуррентную формулу.

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} = \frac{1}{a^2} \int \frac{[(t^2 + a^2) - t^2] dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2a^2} \int \left(t \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right) = \\
&= \frac{1}{a^2} I_{\alpha-1} - \frac{1}{2a^2} \int \left(t \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right); \\
\int \left(t \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha - 1} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} - \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} \right) \right) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(I_{\alpha-1} - \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Т. е.

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \frac{1}{a^2} I_{\alpha-1} - \frac{I_{\alpha-1}}{2a^2(\alpha - 1)} + \frac{t}{2a^2(\alpha - 1)(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} \Rightarrow \\
I_\alpha &= \frac{t}{2a^2(\alpha - 1)(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} + \frac{2\alpha - 3}{2a^2(\alpha - 1)} I_{\alpha-1};
\end{aligned}$$

Учитывая, что $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a} \right) + C$, можно легко найти I_2 , затем I_3 и т. д. до требуемого интеграла I_α .

Таким образом, все 4 случая интегрируемы в элементарных функциях (конкретно – интегралы представляют собой комбинацию логарифмов, арктангенсов и рациональных функций). Следовательно, и вся рациональная правильная дробь интегрируема и, значит, всякая рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях.

Теорема доказана.

Рациональной функцией от двух переменных будем называть выражение вида

$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{0n}y^n$, такое, где хотя бы одно из чисел $a_{n0} \dots a_{0n}$ отлично от нуля.

Дробно-рациональной функцией от двух аргументов называют выражение вида:

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}.$$

Функцию $R(x, y)$ можно представить как $R(x, y) = R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)$, и это выражение будет дробно-рациональной функцией, которая, по доказанной теореме, интегрируема. Следовательно, дробно-рациональная функция от двух аргументов тоже интегрируема.

Билет 35

Интегрируемость в элементарных функциях дробно-линейных иррациональностей и других классов функций

1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Дробно-линейной иррациональностью назовём функцию вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

где $a, b, c, d = \text{const}, n \in \mathbb{N}$.

Пусть $ad - bc \neq 0$. Используем подстановку $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. В таком случае

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt.$$

Полагая, что $R_1(t) = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, R_2(t) = t, R_3(t) = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$, то тогда

$I = \int R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)dt$, а это выражение является рациональной дробью, поэтому интегрируется всегда. Таким образом, дробно-линейные иррациональности **рационализируются** подстановкой $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

2. Интегрирование квадратичных иррациональностей.

Квадратичной иррациональностью назовём функцию вида

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right),$$

где $a, b, c = \text{const}$.

Подобные выражения рационализируются хотя бы одной из трёх **подстановок Эйлера**.

I. Первая подстановка Эйлера. Пусть $a > 0$. Тогда:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x \Rightarrow ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2 \Rightarrow \\ x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t} = R_1(t);$$

$$dx = R_1'(t)dt = R_3(t)dt; \text{ (лень находить, но вроде как } \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)^2});$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x = t \pm \sqrt{a} * R_1(t) = R_2(t); \text{ (вроде бы } \frac{(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)})$$

Таким образом, $I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)dt$, а такое выражение всегда интегрируется, поскольку представляет рациональную дробь.

II. Вторая подстановка Эйлера. Пусть $c > 0$, многочлен имеет комплексные корни. В таком случае используют следующую подстановку.

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= tx \pm \sqrt{c} \Rightarrow ax^2 + bx + c = t^2x^2 + 2\sqrt{c}xt + c \Rightarrow \\ ax + b &= t^2x + 2\sqrt{c}t \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} = R_1(t). \\ dx &= R_1'(t)dt = R_3(t)dt; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= tx \pm \sqrt{c} = tR_1(t) \pm \sqrt{c} = R_2(t).\end{aligned}$$

Опять же, мы получаем интеграл вида $\int R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)dt$.

III. Третья подстановка Эйлера. Пусть многочлен имеет два вещественных корня x_1 и x_2 , т. е. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; тогда используют подстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_k),$$

где $k = 1, 2$. Тогда

$$a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)(x - x_1) \Rightarrow ax - ax_2 = t^2x - t^2x_1.$$

Поскольку $x_1 \neq x_2$, то $x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2} = R_1(t)$. Опять же, $dx = R_3(t)dt$, а сама иррациональность $\sqrt{ax^2 + bx + c} = R_2(t)$.

Мы вновь получаем интеграл вида $\int R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)dt$.

Отметим, что данными тремя подстановками покрываются все случаи квадратичных иррациональностей. Кроме того, использование одной подстановки не исключает использование другой.

3. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

Любые функции вида $R(\sin(x), \cos(x))$ интегрируемы в элементарных функциях. Используя универсальную тригонометрическую подстановку $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, можно рационализировать такую функцию. Действительно,

$$\sin(x) = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2} = R_1(t), \cos(x) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = R_2(t);$$

$$dx = 2(\arctg(t))'dt = \frac{2dt}{1 + t^2} = R_3(t)dt.$$

Исходный интеграл переписывается в следующем виде:

$$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = \int R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)dt.$$

Опять же, данная функция всегда интегрируется в элементарных функциях.

Примеры:

Я бы привёл тут примеры интегрирования каких-нибудь иррациональностей, но **Я ТАКОЙ МЕРЗОСТЬЮ ЗАНИМАТЬСЯ НЕ ХОЧУ.**

(ладно, возможно, чуть позже я соберусь и приведу в пример интегральчика эдак 3. Не уверен, что это нужно. **НАДЕЮСЬ, ЧТО ЭТО НЕ НУЖНО**).